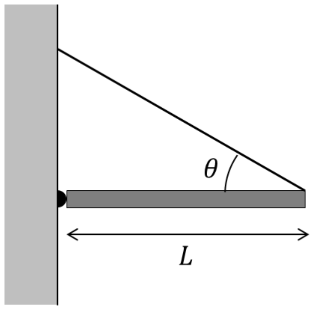
FYS-MEK 1110 Løsningsforslag Eksamen Vår 2014

Oppgave 1 (4 poeng)

Forklar hvorfor Charles Blondin tok med seg en lang og fleksibel stang når han balanserte på stram line over Niagara fossen i 1859.

Han er i en ustabil likevekt. Når han beveger seg litt til siden så virker et kraftmoment fra gravitasjonskraften som gir en vinkelakselerasjon. Bruk av stangen øker hans treghetsmoment betydelig. Det samme kraftmoment gir dermed en mindre vinkelakselerasjon siden $\tau = I\alpha$. Med mindre vinkelakselerasjon har han mer tid å korrigere hans posisjon. En liten bevegelse med stangen til siden gir et kraftmoment i motsatt retning, slik at han kommer tilbake i likevektsposisjonen. En fleksibel stang bøyer ned på endene og gjør at massesenteret ligger lavere. Med en mindre kraftarm er kraftmoment fra gravitasjonskraften mindre.

Oppgave 2 (11 poeng)



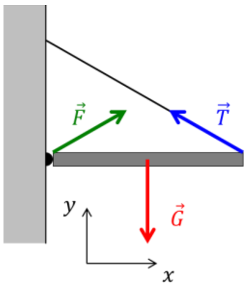
En stang med lengde L og masse m er festet i veggen. Stangen er festet i et hengsel på veggen i den ene enden og et tau i den andre enden som vist i figuren. Vinkelen mellom tauet og stangen er θ. Tyngdeakselerasjonen er g.

a. Tegn et frilegeme diagram for stangen. (3 poeng)

$\vec{G}$: gravitasjonskraft

$\vec{T}$: tauspenning

$\vec{F}$: kraft fra hengselen på stangen



b. Finn tauspenningen som funksjon av masse m, vinkel θ og tyngdeakselerasjon g. (4 poeng)

Likevekt: $\sum \vec{F} = 0$ og $\sum \vec{\tau} = 0$

$$F_x - T\cos\theta = 0$$
$$F_y + T\sin\theta - G = 0$$
$$LT\sin\theta - G\frac{L}{2} = 0$$

hvor vi har sett på kraftmomentet om hengselen. Med $G = mg$ får vi fra den siste ligningen:

$$T = \frac{mg}{2\sin\theta}$$

c. Finn kraften $\vec{F}$ fra hengselet på stangen. Oppgi kraften ved hjelp av x- og y-komponenter eller størrelse og retning. (4 poeng)

Vi setter resultatet fra b. inn i de første to ligninger:

$$F_x = \frac{mg}{2\sin\theta}\cos\theta = \frac{mg}{2\tan\theta}$$

$$F_y = G - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2}$$

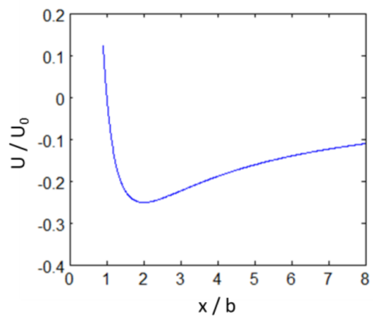
$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2\left(\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + 1\right) = \left(\frac{mg}{2}\right)^2\left(\frac{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}{(\sin\theta)^2}\right) = \left(\frac{mg}{2\sin\theta}\right)^2 = T^2$$

Kraften fra hengselet har samme størrelse som tauspenningen og den samme vinkel mot horisontal.

Oppgave 3 (25 poeng)

Den potensielle energien for et atom som kan bevege seg i én dimensjon i nærheten av et større molekyl er gitt ved:

$U(x) = U_0\left(\frac{b^2}{x^2} - \frac{b}{x}\right)$, hvor x er avstanden mellom atomet og molekylet, og U_0 og b er positive konstanter. Potensialet er illustrert i figuren.



a. Finn et uttrykk for kraften som molekylet utøver på atomet. (3 poeng)

$$F = -\frac{dU}{dx} = U_0\left(\frac{2b^2}{x^3} - \frac{b}{x^2}\right)$$

b. Beregn avstanden x_0 mellom atomet og molekylet når de er i stabilt likevekt. Hvor stor er den potensielle energien i denne posisjonen? (3 poeng)

I likevekt er $F = 0$:

$$\frac{2b^2}{{x_0}^3} = \frac{b}{{x_0}^2}$$

$$x_0 = 2b$$

Potensiell energi:

$$U(x_0) = U_0\left(\frac{b^2}{4b^2} - \frac{b}{2b}\right) = -\frac{U_0}{4}$$

c. Atomet med masse m befinner seg opprinnelig langt unna og beveger seg med hastighet v_0 mot molekylet. Beskriv bevegelsen til atomet. Finn den maksimale farten som atomet vil oppnå. (3 poeng)

Vi vet at energien er bevart siden kraften har et potensial. I stor avstand har atomet potensiell energi $U = 0$ og kinetisk energi $K = \frac{1}{2} m v_0^2$. Når atomet kommer nærmere molekylet blir den potensielle energien negativ, og hastigheten øker. Hastigheten er størst i punktet hvor potensialet har et minimum, $x_0 = 2b$. Når atomet kommer enda nærmere blir potensialet positiv og den kinetiske energien null. Der snur atomet, akselerer rask, men etter avstanden $x_0 = 2b$ minker den potensielle energien igjen. Atomet vil allikevel fjerne seg mot uendelig.

Den maksimale farten ved bruk av energibevaring:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = -\frac{U_0}{4} + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{U_0}{2m} + v_0^2}$$

d. Hvor nært kan atomet komme molekylet når atomet starter i ro i stor avstand fra molekylet? (3 poeng)

Atomet starter i stor avstand i ro: $U = 0$ og $K = 0$.

Atomet er på sitt nærmeste når den potensielle energien er igjen null: $U(x) = 0$

$$\frac{b^2}{x^2} - \frac{b}{x} = 0$$

$$x = b$$

Vi betrakter nå den tre-dimensjonale fall hvor potensialet er gitt ved: $U(\vec{r}) = U_0 \left(\frac{b^2}{r^2} - \frac{b}{r}\right)$, hvor $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ er avstanden mellom atomet og molekylet.

e. Vis at den tre-dimensjonale kraften fra molekylet på atomet er gitt ved:

$$\vec{F}(\vec{r}) = U_0 \left(\frac{2b^2}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right) \hat{e}_r = U_0 \left(\frac{2b^2}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right) \frac{\vec{r}}{r}$$

(4 poeng)

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Vi kan beregne gradienten i sfæriske koordinater: $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$

$$\vec{F} = -\nabla U = U_0 \left(\frac{2b^2}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right) \hat{e}_r$$

Det er også mulig å bruke kartesiske koordinater:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 b^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} - U_0 b (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right)$$

$$= -U_0 b^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} 2x + \frac{1}{2} U_0 b (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x$$

$$= -U_0 \left(\frac{b^2}{r^4} - \frac{b}{r^3}\right) x$$

Med tilsvarende beregning for y og z får vi det samme resultat:

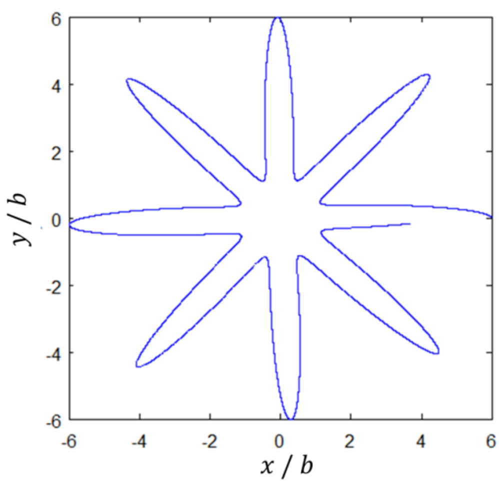
$$\vec{F} = U_0\left(\frac{2b^2}{r^4} - \frac{b}{r^3}\right)\vec{r}$$

f. Skriv et program som beregner posisjonen og hastigheten til atomet når det starter fra posisjon $\vec{r}_0$ med hastighet $\vec{v}_0$. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (6 poeng)

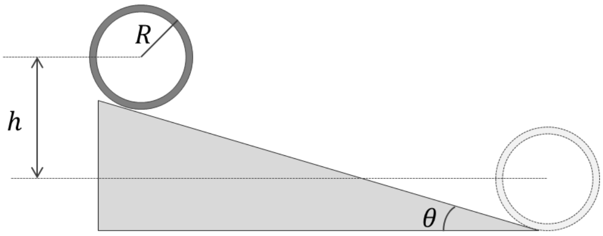
```
m = 1;
b = 1;
U0 = 1;
dt = 0.01;
N = 50000;
r = zeros(N,3);
v = zeros(N,3);
t = zeros(N,1);
r(1,:) = [6.0 0.0 0.0];
v(1,:) = [0.0 0.05 0.0];
for i=1:N-1
    rr = norm(r(i,:));
    F = U0*(2*b^2/rr^4-b/rr^3)*r(i,:);
    a = F/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
    r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(r(:,1),r(:,2));
xlabel('x/b');
ylabel('y/b');
```

g. Figuren nedenfor viser resultatet av en simulering for posisjonen til atomet i x-y planet, hvor atomet starter fra posisjon $\vec{r}_0 = 6b\,\hat{\imath}$ med en liten hastighet i y-retning. Forklar bevegelsen til atomet. (3 poeng)

I utgangspunkt virker en kraft i negativ x retning på atomet. Siden atomet har en liten hastighet i y retning er kollisjonen med molekylet ikke sentral. Etter kollisjonen beveger atomet seg både i x og y retning og fjerner seg fra molekylet. Spredningsvinkelen er cirka 45°. Siden kollisjonen er elastisk (konservativ kraft) kommer atomet like langt bort fra molekylet før den stanser og kraften tiltrekker atomet igjen. Spredningen med cirka 45° gjentar seg igjen og igjen, slik at atomet beveger seg rundt molekylet på en stjerneformet bane.



Oppgave 4 (16 poeng)



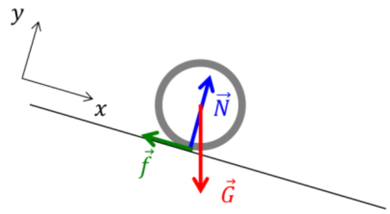
Et tynt sylinderskall med masse M og ytre radius R begynner i ro og ruller ned et skråplan uten å skli. Treghetsmomentet til sylinderskallet for rotasjon om massesenteret er $I_{\mathrm{cm}} = MR^2$. Skråplanet har en helningsvinkel θ. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom sylinderskallet og underlaget er μ_s. Massesenteret har flyttet seg en vertikal avstand h idet sylinderskallet når bunnen av skråplanet. Tyngdeakselerasjonen er g.

a. Tegn et frilegeme diagram for sylinderskallet og navngi alle krefter. (3 poeng)

$\vec{G}$: Gravitasjonskraft

$\vec{N}$: Normalkraft

$\vec{f_s}$: statisk friksjonskraft



b. Finn et uttrykk for den lineære akselerasjonen til massesenteret som funksjon av tyngdeakselerasjonen g og vinkelen θ. (5 poeng)

Vi bruker Newtons andre lov for translasjon og rotasjon:

$$Mg\sin\theta - f_s = Ma_x$$
$$N - Mg\cos\theta = 0$$
$$\tau_z = -f_s R = I_{cm}\alpha$$

Kraftmomentet og den resulterende rotasjonen er i negativ z retning. Sylinderskallet ruller uten å skli. Rullebetingelse: $v_x = -R\omega$. Derivasjon gir: $a_x = -R\alpha$. Vi setter inn i ligningen for kraftmomentet:

$$-f_s R = MR^2\left(\frac{-a_x}{R}\right)$$
$$f_s = Ma_x$$

Vi setter inn i den første ligningen:

$$Mg\sin\theta - Ma_x = Ma_x$$
$$a_x = \frac{1}{2}g\sin\theta$$

c. Finn hastigheten til massesenteret idet sylinderskallet når bunnen. Uttrykk hastigheten som funksjon av høyden h og tyngdeakselerasjonen g. (4 poeng)

Sylinderen ruller uten å skli. Gravitasjon er en konservativ kraft. Normalkraften gjør ingen arbeid siden den virke ortogonal mot bevegelsesretning. Den statiske friksjonskraften gjør ingen arbeid fordi angrepspunktet ikke beveger seg. Derfor kan vi bruke energibevaring. Vi definerer nullpunktet til den potensielle energien ved bunnen av skråplanet.

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{v_x}{R}\right)^2 = Mv_x^2$$
$$v_x = \sqrt{gh}$$

d. Finn den største mulige verdien for vinkelen θ, for en gitt friksjonskoeffisient μ_s, slik at sylinderskallet ruller uten å skli. (4 poeng)
Den størst mulige verdien for den statiske friksjonskraften er: $f_s \leq \mu_s N$. Vi kan finne normalkraften fra den andre ligningen i oppgave b.

$$f_s \leq \mu_s N = \mu_s Mg \cos\theta$$

Vi kan også hente et uttrykk for friksjonskraften fra oppgave b:

$$f_s = Ma_x = \frac{1}{2}Mg \sin\theta$$

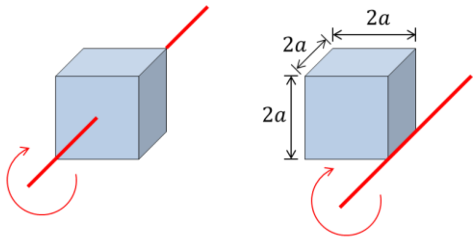
Altså:

$$\frac{1}{2}Mg \sin\theta \leq \mu_s Mg \cos\theta$$

$$\mu_s \geq \frac{1}{2}\tan\alpha$$

Oppgave 5 (16 poeng)

a. En kube med kantlengde $2a$ og masse M som roterer om en hovedakse gjennom sitt massesenter har treghetsmoment $I_{\mathrm{cm}} = \frac{2}{3}Ma^2$. Hva er treghetsmomentet I for rotasjon om én av kantene (se figur)? (3 poeng)



Vi bruker parallellakseteoremet:

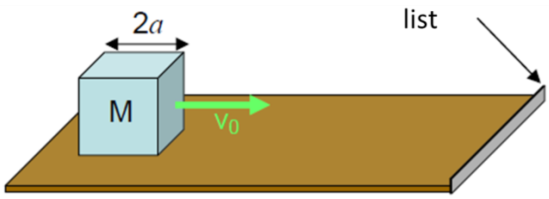
$$I = I_{cm} + Md^2$$

hvor vi har flyttet rotasjonsaksen en avstand $d = a\sqrt{2}$.

$$I = \frac{2}{3}Ma^2 + 2Ma^2 = \frac{8}{3}Ma^2$$

En kube med kantlengde $2a$ og masse M beveger seg med hastighet v_0 langs et friksjonsfritt bord. Du kan se bort fra luftmotstanden. Når den kommer til kanten til bordet treffer kuben på en list slik at den stanser plutselig og begynner å rotere.

b. Del bevegelsen inn i forskjellige faser og diskuter hvilke størrelser som er bevart i de ulike fasene. (4 poeng)



Fase 1: Kuben sklir langs bordet. Siden overflaten er friksjonsfri og vi kan se bort fra luftmotstanden virker bare gravitasjon og normalkraften, slik at nettokraften er null. Derfor er både energi og bevegelsesmengde bevart.
Fase 2: Kollisjon med kanten. Vi vet ingen ting om selve kollisjonsprosessen. Kollisjonen er generelt ikke elastisk, og energi kan gå over til deformasjon, lyd og oppvarming. Det oppstår krefter fra listen på kuben og derfor er bevegelsesmengde ikke bevart heller. Siden angrepspunktene for disse kreftene ligger på rotasjonsaksen er kraftmomentet null og spinn er bevart.
Fase 3: Kuben roterer. Det virker gravitasjon og krefter fra listen på kuben, men sistnevnte gjør ingen arbeid fordi kanten ikke beveger seg. Derfor er energien bevart. På grunn av kreftene fra listen er bevegelsesmengde ikke bevart. Gravitasjon gir et kraftmoment, derfor

er spinn ikke bevart heller.
Fase 4: Kuben roterer enten tilbake til eller faller av bordet.

c. Finn vinkelhastigheten umiddelbart etter kollisjonen med kanten. Uttrykk vinkelhastigheten som funksjon av hastigheten v_0 og lengden a. (4 poeng)
Med argumentene fra b. ser vi at vi kan bruke spinnbevaring. Spinn til kuben om bordkanten umiddelbart før kollisjonen:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = a\hat{j} \times Mv_0\hat{\imath} = -Mav_0\hat{k}$$

Etter kollisjonen roterer kuben om kanten:

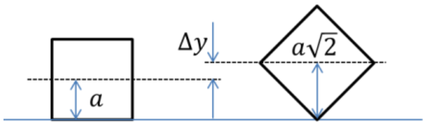
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Altså:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{I} = \frac{-Mav_0}{\frac{8}{3}Ma^2}\hat{k} = -\frac{3}{8}\frac{v_0}{a}\hat{k}$$

d. Hva er minimumshastigheten som kuben må ha for å falle av bordet? Uttrykk svaret i form av lengden a og tyngdeakselerasjonen g. (5 poeng)
Vinkelhastigheten må være stort nok for at massesenteret løftes til en høyde

$$\Delta y = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$$



Vi bruker energibevaring:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \geq Mga\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{Mav_0}{I}\right)^2 = \frac{(Mav_0)^2}{2\frac{8}{3}Ma^2} = \frac{3}{16}Mv_0^2 \geq Mga\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{16}{3}(\sqrt{2}-1)ga}$$

Oppgave 6 (10 poeng)

To koordinatsystemer S og S' er orientert slik at tilsvarende akser peker i samme retning. System S' beveger seg med hastighet u i forhold til system S langs x-aksen. Lorentz transformasjonen fra system S til system S' kan da skrives som:

$$x' = \gamma(x - ut),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma(t - \tfrac{u}{c^2}x).$$

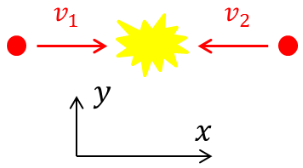
a. En observatør i system S måler en konstant hastighet til en partikkel i x-retning og finner $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. En observatør som befinner seg i system S' måler hastigheten $v_x' = \frac{\Delta x\prime}{\Delta t\prime}$. Vis at sammenhengen mellom $v_x{}'$ og v_x er:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

(5 poeng)

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

a. I et eksperiment akselereres to protoner til høy hastighet i motsatt retning slik at de kolliderer. I laboratoriesystemet S måler vi hastighetene $v_1 = 0.8\,c$ og $v_2 = -0.8\,c$. Vi definerer systemet S' slik at det andre protonet er i ro, $v_2' = 0$, målt i dette systemet. Hva er hastigheten til det første protonet i system S'? Med andre ord, hvis du er et av protonene, hva er hastigheten som du måler for protonet som kommer mot deg? (5 poeng)



I system S er:

$v_1 = v = 0.8\,c,\qquad v_2 = -v = -0.8\,c$

I system S' er det andre protonet i ro: $v_2{}' = 0$

Relativhastigheten mellom de to systemer er dermed: $u = -v = -0.8\,c$

Vi bruker resultatet fra oppgave a:

$$v_1' = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_1} = \frac{v - (-v)}{1 - \frac{(-v)}{c^2}v} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1.6\,c}{1 + 0.8^2} = \frac{1.6}{1.64}c = 0.976\,c$$