UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

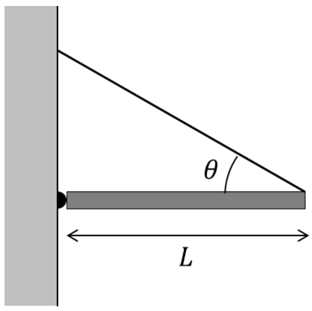
Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: Tirsdag, 3. juni 2014
Tid for eksamen: kl. 9:00 – 13:00
Oppgavesettet omfatter 6 oppgaver på 4 sider
Vedlegg: formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller
Angell, Lian, Øgrim: Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler
Rottmann: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (4 poeng)

Forklar hvorfor Charles Blondin tok med seg en lang og fleksibel stang når han balanserte på stram line over Niagara fossen i 1859.

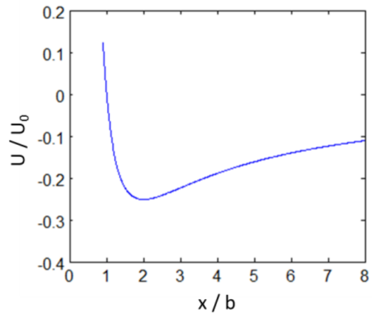
Oppgave 2 (11 poeng)



En stang med lengde L og masse m er festet i veggen. Stangen er festet i et hengsel på veggen i den ene enden og et tau i den andre enden som vist i figuren. Vinkelen mellom tauet og stangen er θ. Tyngdeakselerasjonen er g.

a. Tegn et frilegeme diagram for stangen. (3 poeng)
b. Finn tauspenningen som funksjon av masse m, vinkel θ og tyngdeakselerasjon g. (4 poeng)
c. Finn kraften $\vec{F}$ fra hengselet på stangen. Oppgi kraften ved hjelp av x- og y-komponenter eller størrelse og retning. (4 poeng)

Oppgave 3 (25 poeng)



Den potensielle energien for et atom som kan bevege seg i én dimensjon i nærheten av et større molekyl er gitt ved:

$U(x) = U_0 \left(\frac{b^2}{x^2} - \frac{b}{x}\right)$, hvor x er avstanden mellom atomet og molekylet, og U_0 og b er positive konstanter. Potensialet er illustrert i figuren.

a. Finn et uttrykk for kraften som molekylet utøver på atomet. (3 poeng)
b. Beregn avstanden x_0 mellom atomet og molekylet når de er i stabilt likevekt. Hvor stor er den potensielle energien i denne posisjonen? (3 poeng)
c. Atomet med masse m befinner seg opprinnelig langt unna og beveger seg med hastighet v_0 mot molekylet. Beskriv bevegelsen til atomet. Finn den maksimale farten som atomet vil oppnå. (3 poeng)
d. Hvor nært kan atomet komme molekylet når atomet starter i ro i stor avstand fra molekylet? (3 poeng)

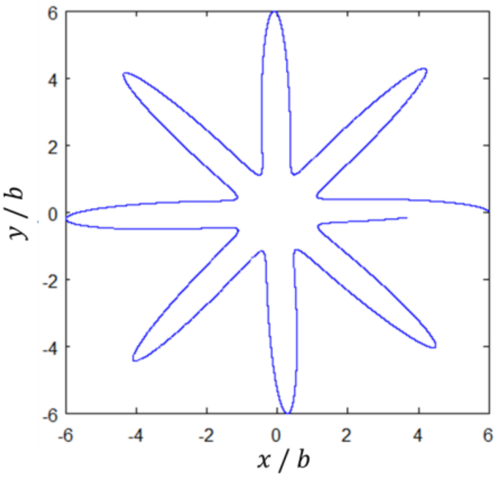
Vi betrakter nå det tre-dimensjonale tilfellet hvor potensialet er gitt ved: $U(\vec{r}) = U_0 \left(\frac{b^2}{r^2} - \frac{b}{r}\right)$, hvor $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ er avstanden mellom atomet og molekylet.

e. Vis at den tre-dimensjonale kraften fra molekylet på atomet er gitt ved:

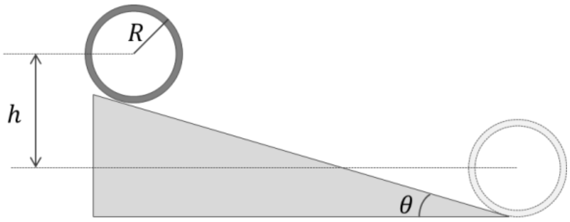
$$\vec{F}(\vec{r}) = U_0 \left(\frac{2b^2}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right)\hat{e}_r = U_0 \left(\frac{2b^2}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}$$

(4 poeng)

f. Skriv et program som beregner posisjonen og hastigheten til atomet når det starter fra posisjon $\vec{r}_0$ med hastighet $\vec{v}_0$. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (6 poeng)
g. Figuren nedenfor viser resultatet av en simulering for posisjonen til atomet i x-y planet, hvor atomet starter fra posisjon $\vec{r}_0 = 6b\,\hat{\imath}$ med en liten hastighet i y-retning. Forklar bevegelsen til atomet. (3 poeng)



Oppgave 4 (16 poeng)

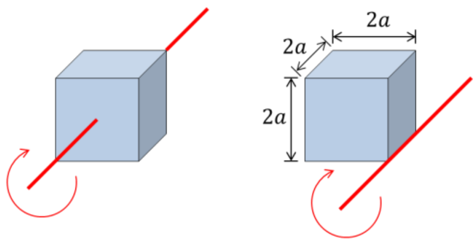


Et tynt sylinderskall med masse M og ytre radius R begynner i ro og ruller ned et skråplan uten å skli. Treghetsmomentet til sylinderskallet for rotasjon om massesenteret er $I_{\text{cm}} = MR^2$. Skråplanet har en helningsvinkel θ. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom sylinderskallet og underlaget er μ_s. Massesenteret har flyttet seg en vertikal avstand h idet sylinderskallet når bunnen av skråplanet. Tyngdeakselerasjonen er g.

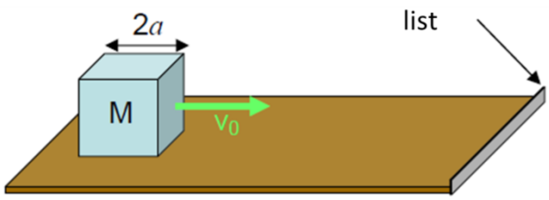
a. Tegn et frilegeme diagram for sylinderskallet og navngi alle krefter. (3 poeng)
b. Finn et uttrykk for den lineære akselerasjonen til massesenteret som funksjon av tyngdeakselerasjonen g og vinkelen θ. (5 poeng)
c. Finn hastigheten til massesenteret idet sylinderskallet når bunnen. Uttrykk hastigheten som funksjon av høyden h og tyngdeakselerasjonen g. (4 poeng)
d. Finn den største mulige verdien for vinkelen θ, for en gitt friksjonskoeffisient μ_s, slik at sylinderskallet ruller uten å skli. (4 poeng)

Oppgave 5 (16 poeng)

a. En kube med kantlengde $2a$ og masse M som roterer om en hovedakse gjennom sitt massesenter har treghetsmoment $I_{\text{cm}} = \frac{2}{3}Ma^2$. Hva er treghetsmomentet I for rotasjon om én av kantene (se figur)? (3 poeng)



En kube med kantlengde $2a$ og masse M beveger seg med hastighet v_0 langs et friksjonsfritt bord. Du kan se bort fra luftmotstanden. Når den kommer til kanten til bordet treffer kuben på en list slik at den stanser plutselig og begynner å rotere.



b. Del bevegelsen inn i forskjellige faser og diskuter hvilke størrelser som er bevart i de ulike fasene. (4 poeng)
c. Finn vinkelhastigheten umiddelbart etter kollisjonen med kanten. Uttrykk vinkelhastigheten som funksjon av hastigheten v_0 og lengden a. (4 poeng)
d. Hva er minimumshastigheten som kuben må ha for å falle av bordet? Uttrykk svaret i form av lengden a og tyngdeakselerasjonen g. (5 poeng)

Oppgave 6 (10 poeng)

To koordinatsystemer S og S' er orientert slik at tilsvarende akser peker i samme retning. System S' beveger seg med hastighet u i forhold til system S langs x-aksen. Lorentz transformasjonen fra system S til system S' kan da skrives som:

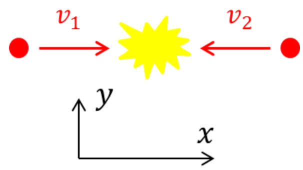
$$x' = \gamma(x - ut), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x).$$

a. En observatør i system S måler en konstant hastighet til en partikkel i x-retning og finner $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. En observatør som befinner seg i system S' måler hastigheten $v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. Vis at sammenhengen mellom $v_x{}'$ og v_x er:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

(5 poeng)

b. I et eksperiment akselereres to protoner til høy hastighet i motsatt retning slik at de kolliderer. I laboratoriesystemet S måler vi hastighetene $v_1 = 0.8\,c$ og $v_2 = -0.8\,c$. Vi definerer systemet S' slik at det andre protonet er i ro, $v_2' = 0$, målt i dette systemet. Hva er hastigheten til det første protonet i system S'? Med andre ord, hvis du er et av protonene, hva er hastigheten som du måler for protonet som kommer mot deg? (5 poeng)



***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,)$

Galilei transformasjon: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$

Statisk friksjon: $|F_s| \leq \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|F_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = -\omega R$

Fiktive krefter: $\vec{a}\,' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}\,' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}$

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y, z' = z,\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Relativistisk: $m = \gamma m_0$, $\vec{p} = m\vec{v}$, $E = mc^2$