Løsningsforslag

Midtveiseksamen i Fys-Mek1110 våren 2008

Oppgave 1

a) En roer sitter i en båt på vannet og ror med konstant fart. Tegn et frilegemediagram for roeren, og navngi alle kreftene.

Summen av kreftene er null i alle retninger. Kontaktkrefter: Normalkraft fra tofte på mann. Friksjonskraft fra tofte på mann virker bakover. Kraft fra åre på mann virker forover. Mulig luftmotstand på mann fra luften. Fjernkrefter: Tyngdekraft på mann.

b) En liten støvpartikkel med masse m faller loddrett gjennom luften. Finn et uttrykk for hvordan terminalhastigheten avhenger av massen til partikkelen, tyngdens akselerasjon g, samt andre konstanter. Finn et tilsvarende uttrykk for en lastebil som faller loddrett ned gjennom luften

Kreftene som virker på støvkornet er kontaktkrefter: Luftmotstand proporsjonal med hastigheten for små partikler: $F = -bv$, hvor b er en proporsjonalitetskonstant. Fjernkrefter: Gravitasjon $W = mg$. Når partikkelen når terminalhastigheten er den ikke lenger akselerert. Newtons andre lov i vertikal retning:

$$\sum F_y = F - mg = ma_y = 0$$

Som gir

$$-bv_T - mg = 0$$

$$v_T = -\frac{mg}{b}$$

For terminalhastigheten v_T.

For en lastebil er luftmotstanden proporsjonal med hastigheten i annen:

$$F = -Dv^2$$

Vi får samme argument som ovenfor, men nå med

$$Dv_T^2 - mg = 0$$

$$v_T = \sqrt{\frac{mg}{D}}$$

c) En stav med lengden L roterer i et plan med konstant vinkelhastighet. Finn vinkelhastigheten til staven i tilfellet (i) hvor staven roterer om midtpunktet og ytterste punkt på staven har farten v, og (ii) hvor staven roterer om et endepunkt, og det andre endepunktet har farten $2v$.

Vinkelhastigheten ω er relatert til hastigheten v til et punkt i avstanden R fra rotasjonsaksen ved $v = \omega R$. I tilfelle (i) er $R = L/2$ som gir $\omega = v/(L/2) = 2v/L$. I tilfelle (ii) er $R = L$ som gir $\omega = 2v/R = 2v/L$.

d) *En kloss med masse m ligger på et friksjonsfritt bord. Klossen er festet i en fjær med fjærkonstant k og likevektslengde a. Den andre enden av fjæren er festet i bordet i punktet $x = 0$. Fjærkraften er horisontal. Tegn et energidiagram for systemet og beskriv klossens bevegelse. Finn likevektspunkter og klassifiser disse.*

Det er her viktig å innse at fjæren kan være i to ulike posisjoner. Fjæra kan (i) ligge fra $x = 0$ til $x = a$, eller den kan (ii) ligge fra $x = 0$ til $x = -a$. I tilfelle (i) er den potensielle energien til klossen og fjæra:

$$U_1(x) = \frac{1}{2}k\left(x-a\right)^2$$

Og i tilfelle (ii) er den potensielle energien:

$$U_2(x) = \frac{1}{2}k\left(x+a\right)^2$$

Vi kan nå enten anta at fjæren er låst i en situasjon, slik at systemet alltid er beskrevet enten av tilfelle (i) eller av tilfelle (ii), eller vi kan anta at systemet kan gå fra tilfelle (i) til tilfelle (ii) idet klossen passerer $x = 0$. I dette tilfellet er den potensielle energien gitt som:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(x-a)^2, x > 0 \\ \frac{1}{2}k(x+a)^2, x \le 0 \end{cases}$$

Likevektspunktene finner vi ved

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

Disse inntreffer ved $x = a$ og $x = -a$. Begge disse er stabile, da

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$$

Slik at punktene svarer til minimum i den potensielle energien.
For det sammensatte systemet er også punktet $x = 0$ er likevektspunkt, men dette punktet er ustabilt, da den potensielle energien har et lokalt maksimum i dette punktet.

For små energier, når $E < \frac{1}{2}ka^2$, blir klossen låst til en av sidene i systemet, og oscillerer om likevektspunktet. For større energier, vil klossen oscillere omkring $x = 0$, med størst fart i punktene $x = \pm a$, og med vendepunkter gitt av $U_1(x)$ og $U_2(x)$.

e) *Vis at i en dimensjon er enhver kraft som kun er avhengig av posisjonen konservativ.*

En kraft F er konservativ dersom arbeidet utført av kraften er uavhengig av veien. La oss se på arbeidet utført av en kraft $F(x)$ som kun er avhengig av posisjonen. Vi ser på arbeidet fra punktet x_A til punktet x_B:

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = U(x_A) - U(x_B)$$

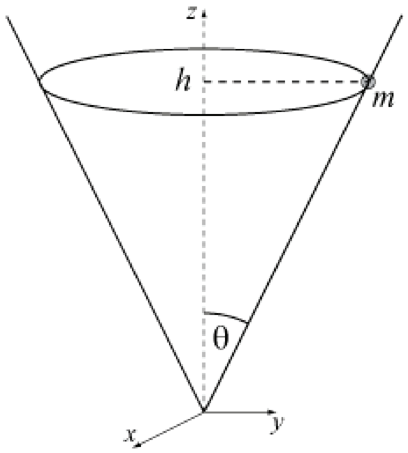
Hvor

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Vi ser at for en kraft som kun avhenger av posisjonen er alltid arbeidet kun avhengig av endepunktene, og arbeidet er gitt som det bestemte integralet av kraften.

Oppgave 2

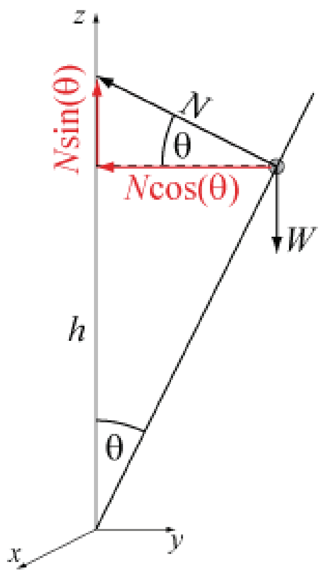
I denne oppgaven skal vi studere en kule som sklir på en friksjonsfri, konisk flate – dvs. inni et kremmerhus. Kula har massen m, den holder konstant fart v og har konstant høyde h. Konens åpningsvinkel er θ som illustrert i figuren. Tyngden virker nedover, i negativ z-retning, og tyngdens akselerasjon er g.



a) Tegn et frilegemediagram for kulen og gjør rede for kreftene som virker på den.

Det er kun normalkraften og tyngdekraften som virker på kulen. Vi ser bort fra luftmotstanden.

Frilegemediagrammet kan se slik ut. Merk at z-komponenten av normalkraften balanserer tyngdekraften.



b) Vis at normalkraften på kulen er $N = \dfrac{mg}{\sin\theta}$

Newtons andre lov i z-retningen gir:

$$\sum F_z = N_z - W = N\sin(\theta) - mg = ma_z = 0$$

Den kinematiske betingelsen som er gitt i oppgaven er at kulen har konstant høyde, derfor beveger den seg ikke i z-retningen, og derfor er akselerasjonen i z-retningen null. Vi får derfor at:

$$N = \frac{mg}{\sin(\theta)}$$

c) Finn høyden h til kulen.

La oss se på kulen idet den er i posisjonen $x = 0, y = R, z = h$. Da er Newtons lov i y-retningen:

$$\sum F_y = -N_y = -N\cos(\theta) = ma_y$$

Fordi kulen beveger seg i en sirkelbane med radius R, vil kulen være akselerert innover, og akselerasjonen er gitt ved sentripetalakselerasjonen:

$$a_y = -\frac{v^2}{R}$$

Vi setter inn for normalkraften og finner:

$$N\cos(\theta) = \frac{mg}{\sin(\theta)}\cos(\theta) = \frac{mg}{\tan(\theta)} = m\frac{v^2}{R}$$

Vi ser at $\frac{R}{h} = \tan(\theta)$, slik at $R = h\tan(\theta)$, og dermed:

$$\frac{mg}{\tan(\theta)} = m\frac{v^2}{R} = m\frac{v^2}{h\tan(\theta)}$$

Som gir:

$$h = \frac{v^2}{g}$$

Vi ser at dette uttrykket er uavhengig av θ!

Oppgave 3

Vi ser på et system av N partikler. Posisjonen til massesenteret er $\vec{R}$. Posisjonen til partikkel j er $\vec{r}_j$ i laboratoriesystemet og $\vec{r}_{cm,j} = \vec{r}_j - \vec{R}$ i massesentersystemet.

a) Vis at den totale bevegelsesmengden i massesentersystemet, $\vec{P}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{cm,i}$, alltid er null.

Vi har at:

$$\vec{P}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{cm,i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm,i} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{cm,i}$$

Vi kjenner igjen det siste uttrykket som posisjonen til massesenteret i forhold til massesenteret, og det er alltid null. Dermed har vi at:

$$\vec{P}_{cm} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{cm,i} = \frac{d}{dt}0 = 0$$

Du vil kunne trenge følgende resultat i oppgaven nedenfor: For en elastisk kollisjon mellom to partikler er absoluttverdien av bevegelsesmengden i massesentersystemet til hver av partiklene den *samme før og etter kollisjonen.*

I denne oppgaven skal vi studere en elastisk kollisjon mellom en α -partikkel med masse M og et proton med masse m . Før kollisjonen er protonet i ro i laboratoriesystemet, og α -partikkelen har hastigheten $\vec{V}$ i laboratoriesystemet.

b) *Finn hastigheten til massesenteret i laboratoriesystemet.*

Massesenteret er definert som:

$$\vec{R} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{r}_i$$

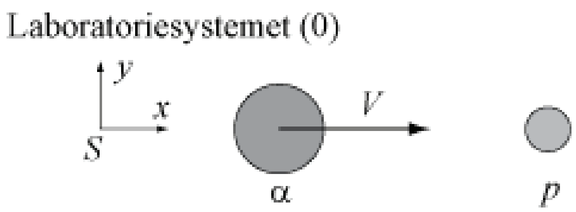
Dermed er hastigheten til massesenteret, $\vec{U}$, gitt som:

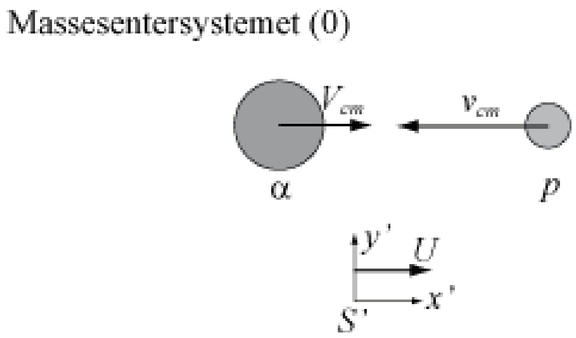
$$\vec{U} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{v}_i$$

Her er hastigheten til protonet $\vec{v} = 0$ og hastigheten til α -partikkelen $\vec{V}$, slik at hastigheten til massesenteret blir:

$$\vec{U} = \frac{1}{m+M}\left(M\vec{V} + m\vec{v}\right) = \frac{M}{m+M}\vec{V}$$

c) *Tegn figur og finn partiklenes hastigheter i massesentersystemet før støtet. Vis at relasjonen i oppgave a er tilfredsstilt.*





Hastigheten til massesentersystemet målt i laboratoriesystemet er

$$\vec{U} = \frac{M}{m+M}\vec{V}$$

Hastigheten til α -partikkelen i massesentersystemet er:

$$\vec{V}_{cm,0} = \vec{V} - \vec{U} = \vec{V} - \frac{M}{m+M}\vec{V} = \frac{m}{m+M}\vec{V}$$

Hastigheten til protonet i massesentersystemet er $\vec{v}_{cm,0}$:

$$\vec{v}_{cm,0} = \vec{v} - \vec{U} = 0 - \vec{U} = -\frac{M}{m+M}\vec{V}$$

Vi ser at bevegelsesmengdene i massesentersystemet er:

For α -partikkelen er bevegelsesmengden i massesentersystemet $\vec{P}_{cm,0}$:

$$\vec{P}_{cm,0} = M\vec{V}_{cm,0} = \frac{Mm}{m+M}\vec{V}$$

For protones er bevegelsesmengden i massesentersystemet $\vec{p}_{cm,0}$:

$$\vec{p}_{cm,0} = m\vec{v}_{cm,0} = -\frac{mM}{m+M}\vec{V}$$

Vi ser derfor at

$$\vec{P}_{cm,0} = -\vec{p}_{cm,0}$$

Og dermed er:

$$\vec{P}_{cm,0} + \vec{p}_{cm,0} = 0$$

Bevegelsesmengden i massesentersystemet er derfor null før kollisjonen.

d) *Finn partiklenes hastigheter i massesentersystemet etter støtet og illustrer disse i figuren. Anta at retningen til α -partikkelens hastighet i massesentersystemet etter støtet er gitt ved enhetsvektoren $\vec{e}$.*

Fordi støtet er elastisk er den kinetiske energien før og etter støtet bevart. Dette gjelder også i massesentersystemet, fordi vi vet at den kinetiske energien kan skilles i en del som har med bevegelsen av massesenteret å gjøre og en del som har med bevegelsen relativt til massesenteret. Siden det ikke er noen ytre krefter som påvirker systemet, vil ikke bevegelsesmengden og dermed heller ikke hastigheten og den kinetiske energien til massesenteret blir forandret i støtet. Da er også den kinetiske energien for bevegelsen relativt til massesenteret bevart. Vi kan bruke dette til å utlede resultatet som er gitt ovenfor i teksten, men vi kan også bruke resultatet direkte.

Fordi absoluttverdien av bevegelsesmengden i massesentersystemet til hver av partiklene er bevart, vet vi at bevegelsesmengden til α -partikkelen er:

$$M\vec{V}_{cm,1} = MV_{cm,0}\vec{e}$$

Hvor enhetsvektoren $\vec{e}$ angir retningen til hastigheten til α -partikkelen i massesentersystemet etter støtet. Det gir:

$$\vec{V}_{cm,1} = \frac{m}{m+M}V\vec{e}$$

Siden den totale bevegelsesmengden i massesenteret er null, finner vi at:

$$\vec{p}_{cm,1} = m\vec{v}_{cm,1} = -\vec{P}_{cm,1} = -M\vec{V}_{cm,1} = -\frac{Mm}{m+M}V\vec{e}$$

Som gir:

$$\vec{v}_{cm,1} = -\frac{M}{m+M}V\vec{e}$$

Dette er illustrert i figuren.

e) *Tegn figur og vis at partiklenes hastigheter etter støtet i laboratoriesystemet er:*

For α -partikkelen: $\dfrac{MV}{M+m}\left(\dfrac{\vec{V}}{V}+\dfrac{m}{M}\vec{e}\right)$

For protonet: $\dfrac{MV}{M+m}\left(\dfrac{\vec{V}}{V}-\vec{e}\right)$

Vi finner hastighetene i laboratoriesystemet ved å transformere tilbake:

$$\vec{V}=\vec{U}+\vec{V}_{cm}$$

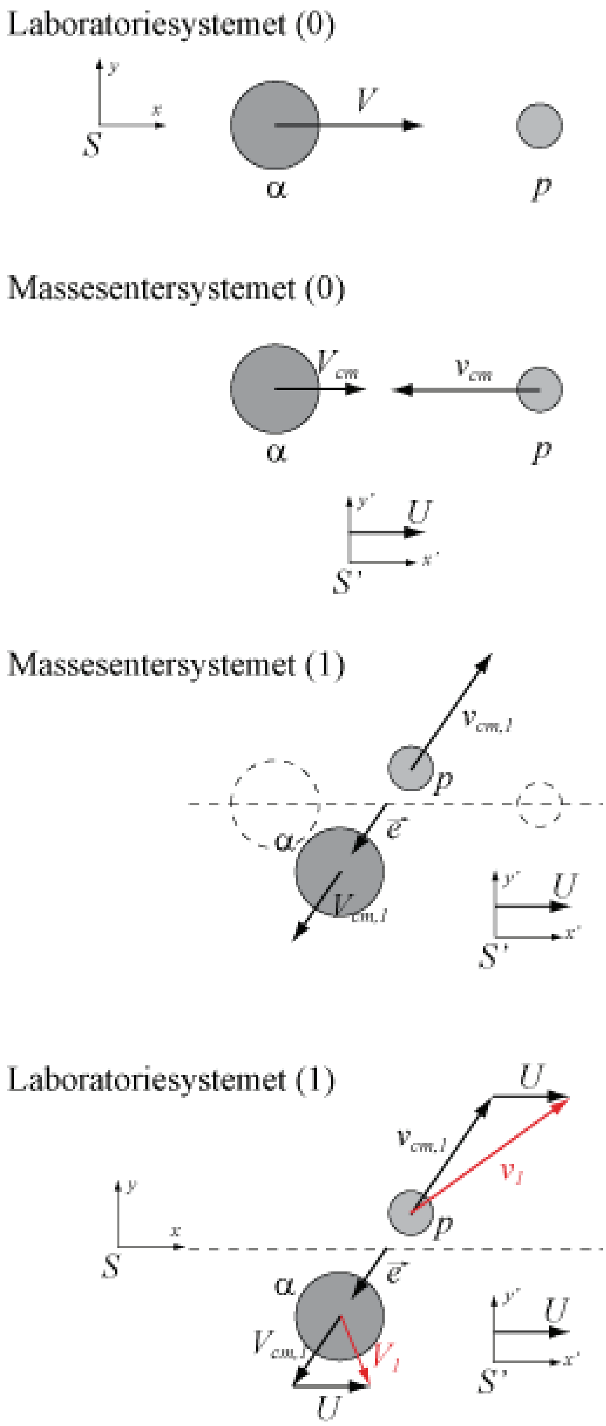
Det gir for α -partikkelen:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1&=\vec{U}+\vec{V}_{cm,1}\\&=\frac{M}{m+M}\vec{V}+\frac{m}{m+M}V\vec{e}\\&=\frac{MV}{m+M}\left(\frac{\vec{V}}{V}+\frac{m}{M}\vec{e}\right)\end{aligned}$$

Og for protonet:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1&=\vec{U}+\vec{v}_{cm,1}\\&=\frac{M}{m+M}\vec{V}-\frac{M}{m+M}V\vec{e}\\&=\frac{MV}{m+M}\left(\frac{\vec{V}}{V}-\vec{e}\right)\end{aligned}$$

Som var det vi skulle vise.



f) *Vis at disse hastighetene stemmer med bevaringssatsene i laboratoriesystemet.*

For en elastisk kollisjon hvor det ikke virker noen ytre krefter på systemet i kollisjonen, er bevegelsesmengden til systemet i laboratoriesystemet og den kinetiske energien til systemet bevart. La oss vise at denne løsningen tilfredsstiller dette:

Bevaring av bevegelsesmengde:

Før støtet er bevegelsesmengden:

$$\vec{P}_0 = M\vec{V}$$

Etter støtet er bevegelsesmengden:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{p}_i &= \vec{P}_1 + \vec{p}_1 \\
&= M\frac{MV}{m+M}\left(\frac{\vec{V}}{V} + \frac{m}{M}\vec{e}\right) + m\frac{MV}{m+M}\left(\frac{\vec{V}}{V} - \vec{e}\right) \\
&= \frac{MV}{m+M}\left(M+m\right)\frac{\vec{V}}{V} + \left(\frac{mMV}{m+M} - m\frac{MV}{m+M}\right)\vec{e} \\
&= M\vec{V}
\end{aligned}$$

Bevegelsesmengden er derfor bevart i laboratoriesystemet.

Bevaring av kinetisk energi:

Før støtet er den kinetiske energien:

$$K_0 = \frac{1}{2}MV^2$$

Etter støtet er den kinetiske energien:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\
&= \frac{1}{2}M\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2\left(\frac{\vec{V}}{V} + \frac{m}{M}\vec{e}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2\left(\frac{\vec{V}}{V} - \vec{e}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2\left(M\left(1 + 2\frac{m}{M}\frac{\vec{V}}{V}\bullet\vec{e} + \left(\frac{m}{M}\right)^2\right) + m\left(1 - 2\frac{\vec{V}}{V}\bullet\vec{e} + 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2\left(\frac{1}{M}\left(M^2 + 2mM + m^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}MV^2
\end{aligned}$$

g) *Finn den maksimale avbøyingen for α -partikkelen, det vil si den største vinkelen partikkelen kan bøyes vekk fra sin opprinnelige bane.*

Vi ser av uttrykket for hastigheten til α -partikkelen etter kollisjonen:

$$\vec{V}_1 = \frac{MV}{m+M}\left(\frac{\vec{V}}{V} + \frac{m}{M}\vec{e}\right)$$

at den maksimale avbøyingen oppnår vi når $\vec{e}$ står normalt på $\vec{V}$. La oss anta at $\vec{V} = V\hat{i}$, dvs at hastigheten peker langs x-aksen. Da får vi maksimal avbøying når $\vec{e} = \hat{j}$. Da er retningen gitt ved:

$$\vec{V}_1 = \frac{MV}{m+M}\left(\hat{i} + \frac{m}{M}\hat{j}\right)$$

Vinkelen θ blir da gitt ved:

$$\tan(\theta) = \frac{m}{M}$$

Slik at:

$$\theta = \arctan(\frac{m}{M})$$

Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi studere et atom på en atomær overflate. Vi beskriver vekselvirkningen mellom atomet og overflaten ved den potensiell energien til atomet som funksjon av posisjonen x langs overflaten: $U(x) = U_0\left(1-\cos(2\pi x / x_0)\right)$. Atomet har massen m og beveger seg kun langs x-aksen.

a) *Finn et eksplisitt uttrykk for akselerasjonen til atomet.*

Kraften på atomet er gitt ved:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(U_0\left(1-\cos(2\pi x / x_0)\right)\right) = -U_0\frac{2\pi}{x_0}\sin(2\pi x / x_0)$$

Newtons andre lov for atomet gir:

$$F = ma = -U_0\frac{2\pi}{x_0}\sin(2\pi x / x_0)$$

$$a = -\frac{U_0}{m}\frac{2\pi}{x_0}\sin(2\pi x / x_0)$$

b) *Vis at når $x << x_0$ kan bevegelseslikningen tilnærmet skrives som: $a = -\omega^2 x$ og finn ω. Beskriv bevegelsen til atomet i denne grensen.*

For små u kan vi rekkeutvikle $\sin(u)$ og finner da: $\sin(u) = u + O(u^2)$. Det gir:

$$a = -\frac{U_0}{m}\frac{2\pi}{x_0}\sin(2\pi x / x_0) \approx -\frac{U_0}{m}\left(\frac{2\pi}{x_0}\right)^2 x = -\omega^2 x$$

Hvor vi ser at:

$$\omega = \frac{2\pi}{x_0}\sqrt{\frac{U_0}{m}}$$

Denne likningen beskriver en harmonisk oscillator. Atomet vi vibrere omkring $x = 0$ med en periodetid $T = 2\pi / \omega$. Amplituden i oscillasjonen er avhengig av initialbetingelsene. Tilnærmingen gjelder kun for små utslag. (Merk at her er ω kun er konstant som ikke har noe med en vinkelhastighet for en rotasjon å gjøre.)

c) *Atomet starter i posisjonen $x = 0$ med hastigheten v_0. Hvor stor må v_0 være for at atomet skal nå posisjonen $x = 4x_0$? Skisser bevegelsen $x(t)$ til atomet i dette tilfellet.*

Atomet beveger seg i et potensial og er ikke påvirket av noen ikke-konservative krefter. Den totale mekaniske energien til atomet er derfor bevart. For at atomet skal nå en avstand $x = 4x_0$ må den ha tilstrekkelig total energi til å komme ut av potensialbrønnen omkring $x = 0$. Den maksimale potensielle energien er $U = 2U_0$. Den initielle kinetiske energien må derfor være større enn dette:

$$E = K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

Hvor

$$K_0 + U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0$$

Og

$$K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + 2U_0$$

Den minste kinetiske energien som skal til finner vi ved å sette $v_1 = 0$ slik at atomet akkurat kommer forbi "toppen i energilandskapet".

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = 2U_0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4U_0}{m}}$$

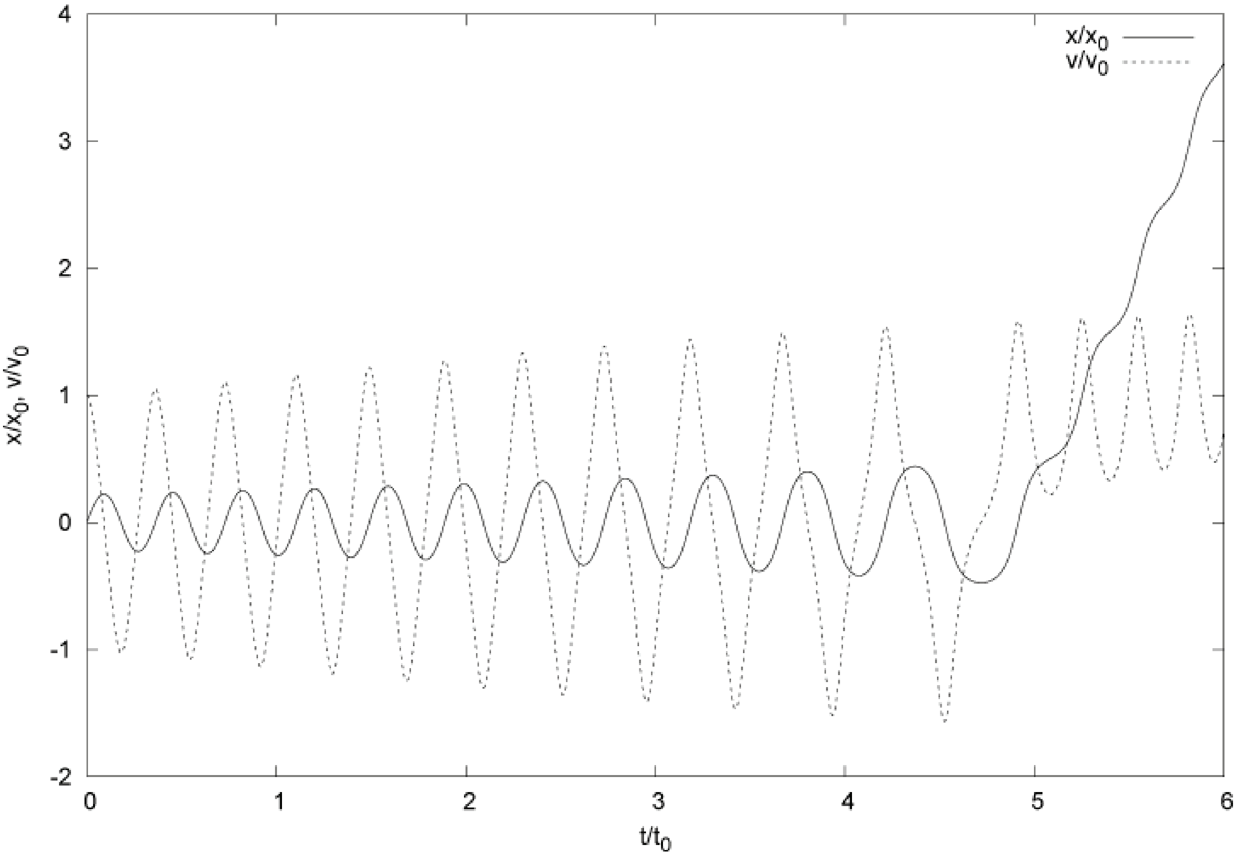
Atomet vil bevege seg med en tilnærmet konstant hastighet med små oscillasjoner omkring denne hastigheten, slik vi ser på slutten av figur 1.

d) *(Denne oppgaven teller dobbelt). For å løse bevegelseslikningene for atomet i det generelle tilfellet i oppgave a har du utviklet et program i Python som finner posisjon og hastighet til atomet ved hjelp av Eulers metode. Du gjør en simulering med realistiske parametere og initialbetingelsene $x = 0$ og $v = v_0$ ved tiden $t = 0$ og får resultatet i figur 1 nedenfor. Forklar resultatet.*

Fordi atomet kun er påvirket av kraften F som er konservativ, skal den totale energien være bevart. Det er klart fra figur 1 at energien i systemet ikke er bevart da både den potensielle energien og den kinetiske energien øker med tiden. For eksempel ser vi at hastigheten er maksimal idet $x = 0$, dvs. når den potensielle energien er null. Vi ser at i figuren øker hastigheten idet $x = 0$ med tiden. Dette tyder på at energien i simuleringen ikke er bevart. Fenomenet vi observerer er derfor ikke en fysisk effekt, men et resultat av at Eulers metode ikke er egnet til å løse dette problemet. Vi ville fått bedre resultater ved for eksempel å bruke en Runge-Kutta metode.

Hensikten med denne oppgaven er at du skal bruke din fysiske innsikt om energibevaring til å vurdere et resultat.

Oppførslene som systemet går gjennom er dog hver for seg fysisk mulige, og simuleringen viser avviket fra den enkle harmoniske oscillatoren for små utslag. For større hastigheter vil atomet unnslippe, og utføre en oscillerende bevegelse med svingninger omkring en konstant hastighet som illustrert i figuren.



Figur 1: Resultat av simulering av bevegelseslikningen i oppgave a.

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!