UNIVERSITETET I OSLO

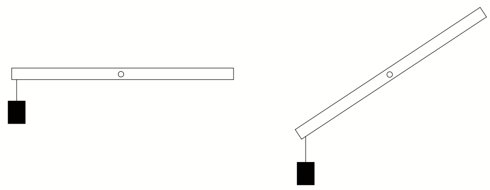
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig hjemmeeksamen i FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2021
Dato: Torsdag 17. juni 2021, kl 09:00-13:30 (4 timer pluss 30 minutter for innlevering av pdf-fil i Inspera)
Oppgavesettet er på: 7 sider (formelark bakerst på side 8).
Tillatte hjelpemidler: Alle hjelpemidler er tillatt ved skriftlig hjemmeeksamen (men ikke samarbeid med andre – se forsiden i Inspera). Dersom du gjengir tekst fra bøker, nettartikler eller lignende, så må det henvises til disse kildene i besvarelsen for å unngå mistanke om ulovlig tekstlikhet. Dette gjelder også dersom du oversetter tekst fra andre språk.
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes!
Lykke til!

Oppgave 1 Flervalgsoppgaver (12 poeng)
Her ber vi deg om å velge det svaret du mener er riktig, og at du forklarer *hvorfor* det valgte svaret er riktig. Du får 1 poeng for riktig svaralternativ og 2 poeng for riktig forklaring.

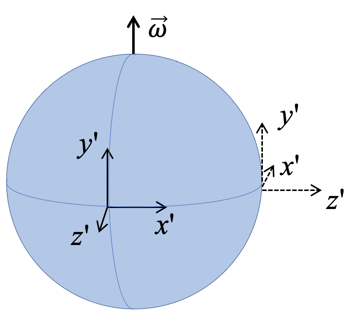
1.1 Vi har en stang som kan rotere friksjonsfritt om en akse som går gjennom stangens massesenter. Vi fester en vekt i den ene enden av stangen, slik at stangen begynner å rotere. Mens staven roterer fra den horisontale til den vertikale posisjonen, vil vinkelakselerasjonen bli

(a) større
(b) mindre
(c) forbli den samme



(3 poeng)

1.2 Du står på ekvator og slipper en masse fra en høyde h. Vi definerer et koordinatsystem som roterer med Jorden som vist i figuren, med x'-aksen mot øst, y'-aksen mot nord, og z'-aksen i radiell retning ut fra jordoverflaten. Hvilken påstand er riktig?

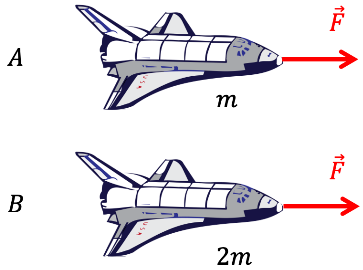


(a) Corioliskraften avleder massen mot nord
(b) Corioliskraften avleder massen mot vest
(c) Corioliskraften avleder massen mot sør
(d) Corioliskraften avleder massen mot øst
(e) Corioliskraften avleder ikke massen, den har ingen effekt ved ekvator

(3 poeng)

1.3 To identiske romskip A og B er først i ro ute i verdensrommet. De starter så motorene samtidig, og akselererer med den samme konstante kraften $\vec{F}$. Uten last har begge romskipene masse m. Romskip A har ingen last ombord, mens romskip B er fullastet og har masse $2m$. Etter en tid t er bevegelsesmengden til romskip B i forhold til romskip A

(a) $p_B = \frac{1}{4}p_A$
(b) $p_B = \frac{1}{2}p_A$
(c) $p_B = p_A$
(d) $p_B = 2p_A$
(e) $p_B = 4p_A$



(3 poeng)

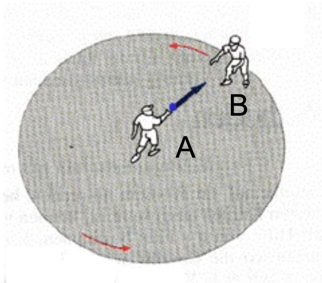
1.4 En astronaut med masse m har en vekt $G_{\text{Jord}} = mg$ på jordoverflaten. Hva veier astronauten (G_{ISS}) på den internasjonale romstasjonen (International Space Station, ISS) som går i bane rundt Jorda 400 km over Jordas overflate? (Bilde: NASA)

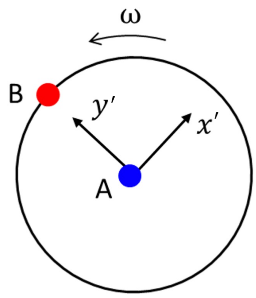
(a) $G_{\text{ISS}} = 0$, astronauten er vektløs.
(b) $G_{\text{ISS}} < G_{\text{Jord}}$, men ikke null.
(c) $G_{\text{ISS}} = G_{\text{Jord}}$.
(d) $G_{\text{ISS}} > G_{\text{Jord}}$.

(3 poeng)

Oppgave 2 Tekstoppgave: Statisk friksjon (6 poeng)
Kari holder en bok i ro inntil en vegg slik som vist på figuren. Vil friksjonen på boka fra veggen virke oppover, nedover, eller vil det ikke være noen friksjon? Hvis det virker en friksjon, hva slags friksjon er det snakk om? Begrunn svarene dine.

Oppgave 3 Regne- og numerisk oppgave: En karusell (10 poeng)
Person A står i midten av en karusell med radius R og kaster en ball med masse m til person B som står på kanten av karusellen. Person A kaster ballen med fart v_0 rett imot person B. Karusellen roterer med en konstant vinkelfart ω. I denne oppgaven tar vi ikke hensyn til gravitasjonskraften (eller luftmotstand). Ballen vil derfor bevege seg i et horisontalt plan.





(a) Først ser vi på situasjonen utenfra. Beskriv bevegelsen til ballen og finn hvor, i forhold til person B, ballen forlater karusellen. Du kan beskrive denne posisjonen i forhold til person B ved hjelp av vinkelen $\Delta\theta$ og buelengden Δs.
(2 poeng)

(b) Vi bruker nå et referansesystem som roterer med karusellen. Vi definerer origo i rotasjonspunktet, med y'-aksen i retning av person B og $z = z'$-aksen oppover. Finn et uttrykk for akselerasjonen til ballen som funksjon av hastighet og posisjon til ballen i det roterende systemet S', og vinkelhastigheten til karusellen. Forklar hva de ulike leddene i uttrykket for akselerasjonen er, og beskriv kort hva disse leddene avhenger av.
(4 poeng)

(c) Skriv et program som beregner banen til ballen i det roterende systemet. Programmet skal slutte når ballen forlater karusellen. Det er tilstrekkelig å definere initialbetingelsene og skrive integrasjonsløkka.
(4 poeng)

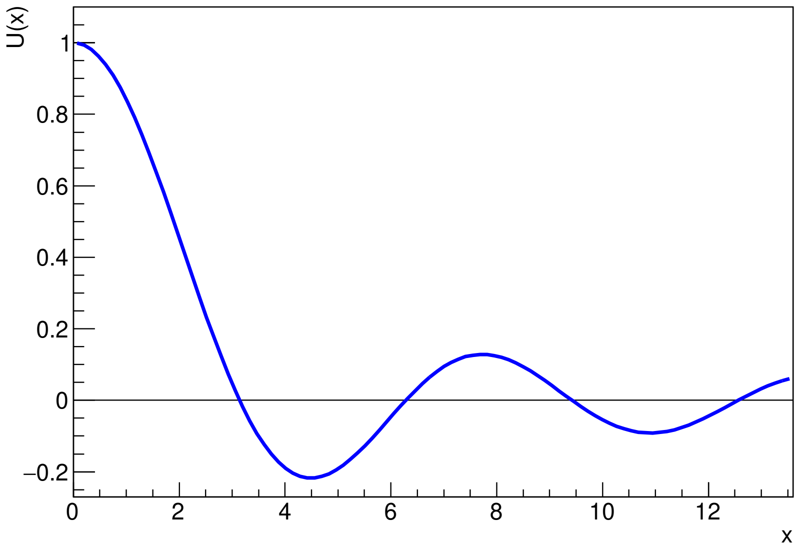
Oppgave 4 Regneoppgave: Potensialer i 1D og 2D (18 poeng)
Vi har et endimensjonalt potensial gitt ved

$$U(x) = U_0 \frac{\sin(x/b)}{(x/b)}.$$

For enkelhets skyld setter vi konstantene til $U_0 = 1\text{J}$ og $b = 1\text{m}$, slik at vi i praksis jobber med det dimensjonsløse potensialet

$$U(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Potensialet er plottet i figuren på neste side.



(a) Forklar hvorfor den tilhørende kraften til dette potensialet er konservativ.
(2 poeng)

(b) Vis at den tilhørende kraften til dette potensialet er gitt ved

$$F(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}.$$

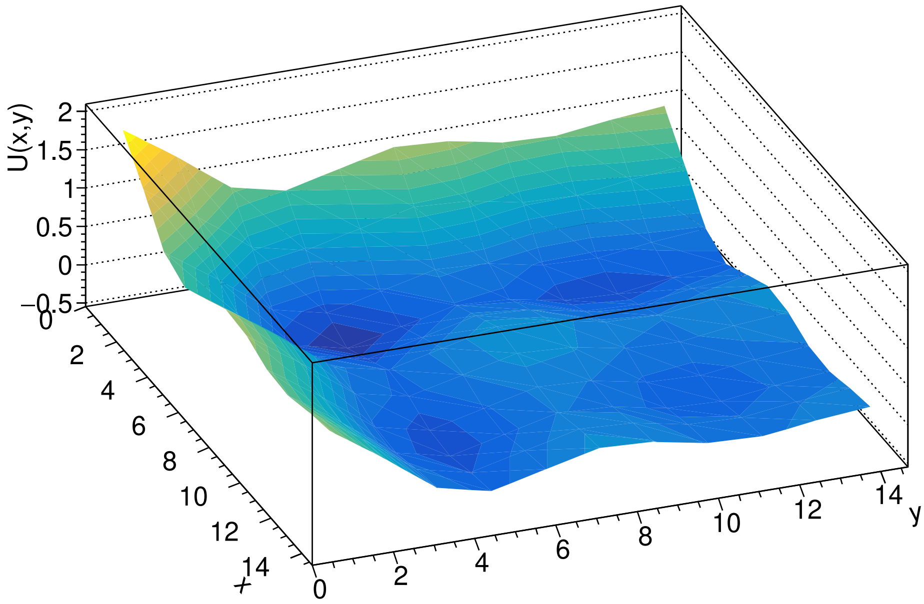
(2 poeng)

(c) For $x \in [1, 12]$, hvor er likevektspunktene til potensialfunksjonen $U(x)$? Bruk gjerne figuren til å finne disse. Karakteriser likevektspunktene som stabile eller ustabile, og forklar hvorfor de er stabile eller ustabile.
(4 poeng)

Vi legger nå på en y-komponent på potensialet, som nå blir

$$U(x, y) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin y}{y},$$

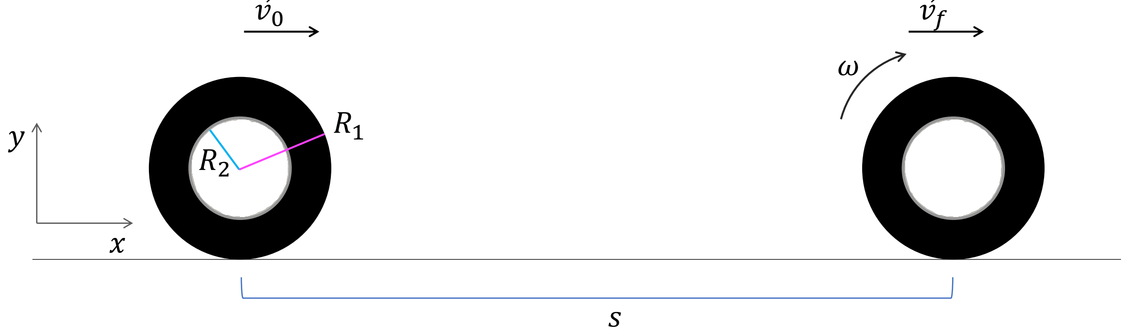
se figur neste side.



(d) Finn den tilhørende kraften $\vec{F}(x, y)$.
(4 poeng)

(e) Er denne kraften også konservativ? Hvorfor eller hvorfor ikke? Hva kan du si om likevektspunktene til dette potensialet $U(x, y)$?
(6 poeng)

Oppgave 5 Regneoppgave: Kasting av bildekk (22 poeng)
Vi skal teste nye sommerdekk og gjør det ved kaste dem så de sklir og ruller på en glatt overflate. Bildekket har masse M, ytre radius R_1 og indre radius R_2. I regningene setter vi for enkelhets skyld $R_2 = \frac{1}{2}R_1$. Bildekket kastes med en massesenterhastighet $\vec{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{i}}$ parallelt med den glatte overflaten. Selv om bildekket er laget av gummi, er gummien i sommerdekk ganske hard. Vi antar derfor at bildekket kan beskrives som et stivt legeme (hul sylinder). En hul sylinder har treghetsmoment $I_{cm} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ om en rotasjonsakse gjennom massesenteret. Den dynamiske friksjonskoeffisienten er μ_d.



Vi kan dele bevegelsen i tre faser:

1: Umiddelbart etter at bildekket kommer i kontakt med overflaten, er det kun en lineær bevegelse av massesenteret, og bildekket sklir bortover overflaten.

2: Den dynamiske friksjonskraften har et kraftmoment om massesenteret til bildekket, og vil etter kort tid sette i gang en rotasjonsbevegelse. Bildekket vil også skli i tillegg til å rulle i denne fasen.

3: Tilslutt, etter en strekning s målt fra der bildekket først kom i kontakt med overflaten, vil bildekket rulle uten å skli.

Vi ser bort fra luftmotstand gjennom hele oppgaven. Vi skal se på bevegelsen til bildekket fra det øyeblikket det kommer i kontakt med overflaten, og det vil forbli i kontakt hele tiden (det spretter ikke).

(a) Tegn et frilegemediagram for bildekket i fase 1 hvor det bare sklir, og i fase 3 når det ruller uten å skli.
(4 poeng)

(b) Beregn spinnet til bildekket om kontaktpunktet med overflaten i fase 1, før bildekket har begynt å rotere.
(2 poeng)

(c) Beregn så spinnet om kontaktpunktet med overflaten i fase 3, når bildekket ruller uten å skli.
(4 poeng)

(d) Regn ut kraftmomentene til alle kreftene som virker i fase 1 og fase 3, og bruk resultatene fra oppgave (b) og (c) til å vise at hastigheten til bildekkets massesenter når det ruller uten å skli er gitt ved

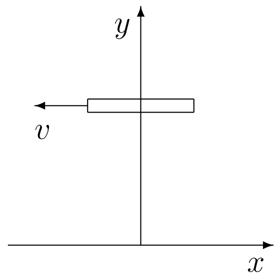
$$\vec{v}_f = \frac{8}{13}\vec{v}_0.$$

(4 poeng)

(e) Finn strekningen s som bildekket beveger seg fra det punktet det kommer i kontakt med overflaten, til det ruller uten å skli.
(4 poeng)

(f) Finn et uttrykk for tapet i kinetisk energi for bildekket over strekningen s.
(4 poeng)

Oppgave 6 Regneoppgave: En relativistisk stav (8 poeng)



En observatør står i ro i origo. En stav med egenlengden l_0 beveger seg med en hastighet $v = 0.8c$ i negativ x-retning. Staven er parallell med x-aksen, og ligger i en avstand d fra x-aksen.

(a) Hvor lang er staven, ifølge observatøren?
(2 poeng)

Staven har lysdioder i endene, og de sender ut et kort lysblink. En observatør som beveger seg med staven mener at de to lysblinkene skjedde samtidig, og samtidig med at midten av staven passerte y-aksen.

(b) For observatøren i ro, når og hvor ble de to lysblinkene sendt ut? Hvilken av lysdiodene vil han si blinket først? (Merk at vi her snakker om koordinatene til hendelsene i observatørens referansesystem, ikke når han ser lysblinkene).
(6 poeng)

Eksamenssett slutt.

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Galilei-transformasjon, referansesystemer: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Statisk friksjon: $|\vec{F}_s| \leq \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|\vec{F}_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1}\vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk rotasjonsenergi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = \omega R$

Fiktive krefter: $m\vec{a}' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\,\vec{\alpha} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$; G er gravitasjonskonstanten

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz-transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y, z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentz-transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}$