UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

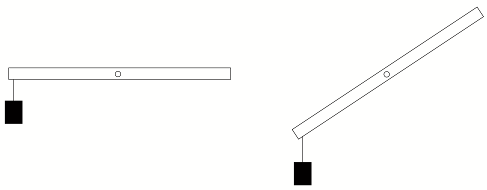
Tentativt løsningsforslag (ACL & JB, v.18.06.2021)

Skriftlig hjemmeeksamen i FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2021
Dato: Torsdag 17. juni 2021, kl 09:00-13:30 (4 timer pluss 30 minutter for innlevering av pdf-fil i Inspera)
Oppgavesettet er på: 7 sider (formelark bakerst på side 8).
Tillatte hjelpemidler: Alle hjelpemidler er tillatt ved skriftlig hjemmeeksamen (men ikke samarbeid med andre – se forsiden i Inspera). Dersom du gjengir tekst fra bøker, nettartikler eller lignende, så må det henvises til disse kildene i besvarelsen for å unngå mistanke om ulovlig tekstlikhet. Dette gjelder også dersom du oversetter tekst fra andre språk.
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes!
Lykke til!

Oppgave 1 Flervalgsoppgaver (12 poeng)
Her ber vi deg om å velge det svaret du mener er riktig, og at du forklarer *hvorfor* det valgte svaret er riktig. Du får 1 poeng for riktig svaralternativ og 2 poeng for riktig forklaring.

1.1 Vi har en stang som kan rotere friksjonsfritt om en akse som går gjennom stangens massesenter. Vi fester en vekt i den ene enden av stangen, slik at stangen begynner å rotere. Mens staven roterer fra den horisontale til den vertikale posisjonen, vil vinkelakselerasjonen bli

(a) større
(b) mindre
(c) forbli den samme



(3 poeng)
Vi ser på størrelsen på kraftmomentet ved tiden t_0 i det stangen er i horisontal posisjon: $\tau = rF\sin\theta_0 = I\alpha_0$, der θ_0 er vinkelen mellom kraftarmen $\vec{r}$ og kraften $\vec{F}$, I er treghetsmomentet om rotasjonsaksen, og α_0 er vinkelakselerasjonen. Her er $\theta_0 = 90^\circ \Rightarrow \sin\theta_0 = 1$, og vinkelakselerasjonen er da

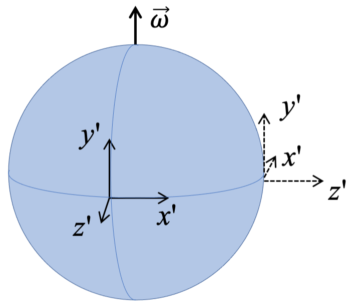
$$\alpha_0 = \frac{rF}{I}.$$

Hva med situasjonen ved tiden t_1, når stangen roterer men har ennå ikke kommet i vertikal posisjon? Da er vinkelen mellom $\vec{r}$ og $\vec{F}$ større enn 90°, og dermed er $\sin\theta_1 < 1$. Vi har derfor at

$$\alpha_1 = \frac{rF\sin\theta_1}{I} < \alpha_0,$$

altså er vinkelakselerasjonen mindre – svar (b) er riktig.

1.2 Du står på ekvator og slipper en masse fra en høyde h. Vi definerer et koordinatsystem som roterer med Jorden som vist i figuren, med x'-aksen mot øst, y'-aksen mot nord, og z'-aksen i radiell retning ut fra jordoverflaten. Hvilken påstand er riktig?



(a) Corioliskraften avleder massen mot nord

(b) Corioliskraften avleder massen mot vest

(c) Corioliskraften avleder massen mot sør

(d) Corioliskraften avleder massen mot øst

(e) Corioliskraften avleder ikke massen, den har ingen effekt ved ekvator

(3 poeng)

Dette var et Mentimeter-spørsmål på forelesning den 20.04.2021 (forelesning 25). Vi bruker koordinatsystemet som vist i figuren, som er "klistret" på et punkt på ekvator og roterer med Jorda. Da har vi enhetsvektorer i det roterende systemet: $\hat{\mathbf{i}}'$ mot øst, $\hat{\mathbf{j}}'$ mot nord, og $\hat{\mathbf{k}}$ i radiell retning, ut i verdensrommet. Massen faller nedover i det roterende systemet, $\vec{v}' = -v'\hat{\mathbf{k}}'$, og Jordas rotasjon er gitt ved $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{j}}'$. Corioliskraften blir da:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\omega\hat{\mathbf{j}}' \times (-v'\hat{\mathbf{k}}') = +2m\omega v'\hat{\mathbf{i}}'.$$

Altså avleder Corioliskraften masse mot øst – svar (d) er riktig.

1.3 To identiske romskip A og B er først i ro ute i verdensrommet. De starter så motorene samtidig, og akselererer med den samme konstante kraften $\vec{F}$. Uten last har begge romskipene masse m. Romskip A har ingen last ombord, mens romskip B er fullastet og har masse $2m$. Etter en tid t er bevegelsesmengden til romskip B i forhold til romskip A

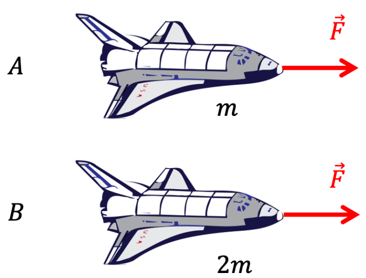
(a) $p_B = \frac{1}{4}p_A$

(b) $p_B = \frac{1}{2}p_A$

(c) $p_B = p_A$

(d) $p_B = 2p_A$

(e) $p_B = 4p_A$



(3 poeng)

Vi har fått vite at begge romskipene starter i ro, så de har ingen initiell hastighet. De blir så akselerert med en konstant kraft $\vec{F}$. Vi bruker definisjonen på impuls (endring i bevegelsesmengde:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt.$$

Siden kraften er konstant, får vi:

$$\vec{J} = \vec{F} \int_{t_0}^{t_1} dt = \vec{F}(t_1 - t_0) = \vec{F}\Delta t.$$

Ettersom de påvirkes av den samme, konstante kraften og de starter samtidig (samme tidsintervall, $t_0 = 0$ og $t_1 = t$), blir impulsen den samme. Dermed har de den samme bevegelsesmengden $\vec{p}_1$ ved tiden t – svar (c) er riktig.

1.4 En astronaut med masse m har en vekt $G_{\text{Jord}} = mg$ på jordoverflaten. Hva veier astronauten (G_{ISS}) på den internasjonale romstasjonen (International Space Station, ISS) som går i bane rundt Jorda 400 km over Jordas overflate? (Bilde: NASA)

(a) $G_{\text{ISS}} = 0$, astronauten er vektløs.
(b) $G_{\text{ISS}} < G_{\text{Jord}}$, men ikke null.
(c) $G_{\text{ISS}} = G_{\text{Jord}}$.
(d) $G_{\text{ISS}} > G_{\text{Jord}}$.

(3 poeng)
Vi bruker Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{G} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Vi ser på størrelsen til gravitasjonskraften ved jordoverflaten ($r = r_{\text{Jord}}$):

$$G_{\text{Jord}} = mg = \gamma \frac{mM}{r_{\text{Jord}}^2}.$$

Hva med størrelsen på gravitasjonskraften på ISS ($r = r_{\text{ISS}} = r_{\text{Jord}} + 400\text{km}$)? Vi har at

$$G_{\text{ISS}} = \gamma \frac{mM}{r_{\text{ISS}}^2}.$$

Siden $r_{\text{ISS}} > r_{\text{Jord}}$, så deler vi på et større tall i uttrykket for G_{ISS}, alle andre størrelser er konstanter. Dermed blir $G_{\text{ISS}} < G_{\text{Jord}}$, men ikke null – svar (b) er riktig.

Oppgave 2 Tekstoppgave: Statisk friksjon (6 poeng)
Kari holder en bok i ro inntil en vegg slik som vist på figuren. Vil friksjonen på boka fra veggen virke oppover, nedover, eller vil det ikke være noen friksjon? Hvis det virker en friksjon, hva slags friksjon er det snakk om? Begrunn svarene dine.

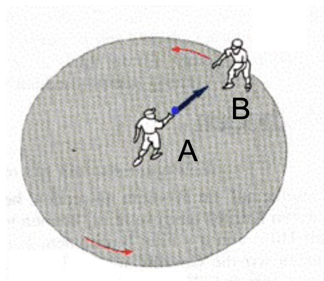
Denne oppgaven er så å si identisk med diskusjonsoppgave D4, ukesett 4. Vi vet at boka skal være i ro, så summen av alle krefter må være null (spesialvarianten av Newtons 2. lov, nemlig Newtons 1. lov):

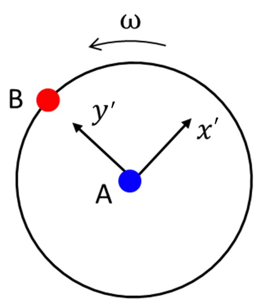
$$\vec{F}_{net} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Vi vet at det alltid er to krefter som må virke på boken, det er tyngdekraft og den kraften Kari dytter boken mot veggen med. Nå spørs det hvor stor kraft Kari bruker når hun trykker boka mot veggen, om det virker friksjon eller ikke, og i hvilken retning. Dersom Kari holder boken mot veggen slik at vertikalkomponenten av kraften hennes på boken er mindre enn bokens tyngdekraft, vil friksjonen virke oppover for at boka skal være i ro. Dersom hun trykker slik at vertikalkomponenten av kraften er lik tyngdekraften, vil det ikke være noe friksjon. Dersom hun trykker hardere slik at vertikalkomponenten av hennes kraft på boken er større enn tyngdekraften, vil friksjonen virke nedover. I alle tilfeller hvor det er en friksjonskraft, må friksjonen være statisk, siden boken skal være i ro.

Oppgave 3 Regne- og numerisk oppgave: En karusell (10 poeng)

Denne oppgaven er så å si identisk med første del av gruppeoppgave G1 ukesett 12. Person A står i midten av en karusell med radius R og kaster en ball med masse m til person B som står på kanten av karusellen. Person A kaster ballen med fart v_0 rett imot person B. Karusellen roterer med en konstant vinkelfart ω. I denne oppgaven tar vi ikke hensyn til gravitasjonskraften (eller luftmotstand). Ballen vil derfor bevege seg i et horisontalt plan.





(a) Først ser vi på situasjonen utenfra. Beskriv bevegelsen til ballen og finn hvor, i forhold til person B, ballen forlater karusellen. Du kan beskrive denne posisjonen i forhold til person B ved hjelp av vinkelen $\Delta\theta$ og buelengden Δs. (2 poeng)

Strekningen ballen beveger seg tilsvarer radien R. Ballen bruker et tidsintervall Δt på å bevege seg avstanden R, og har initialfart v_0. Vi har:

$$\Delta t = \frac{R}{v_0}.$$

I dette tidsintervallet roterer karusellen en vinkel $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \omega\frac{R}{v_0}.$$

Buelengden er gitt ved:

$$\Delta s = R\Delta\theta = R \cdot \frac{\omega R}{v_0} = \frac{\omega R^2}{v_0}.$$

(b) Vi bruker nå et referansesystem som roterer med karusellen. Vi definerer origo i rotasjonspunktet, med y'-aksen i retning av person B og $z = z'$-aksen oppover. Finn et uttrykk for akselerasjonen til ballen som funksjon av hastighet og posisjon til ballen i det roterende systemet S', og vinkelhastigheten til karusellen. Forklar hva de ulike leddene i uttrykket for akselerasjonen er, og beskriv kort hva disse leddene avhenger av.
(4 poeng)
Vi har et akselerert referansesystem, siden karusellen roterer. Akselerasjonen $\vec{a}'$ i et akselerert referansesystem for et helt generelt tilfelle er gitt som:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} - (\vec{\alpha} \times \vec{r}') - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') - (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')).$$

Siden ballen har konstant hastighet i inertialsystemet, er $\vec{a} = \vec{0}$. Siden karusellen ikke har noen lineærakselerasjon, er også $\vec{A} = \vec{0}$. Karusellen roterer med konstant vinkelhastighet, derfor er også vinkelakselerasjonen null: $\vec{\alpha} = \vec{0}$. Så vi sitter igjen med to ledd for akselerasjonen i det roterende referansesystemet:

$$\vec{a}' = -2(\vec{\omega} \times \vec{v}') - (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')).$$

Det første leddet, $-2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$, er Coriolis-akselerasjonen, som avhenger av hastigheten $\vec{v}'$ i det roterende systemet. Så hvis ballen hadde vært i ro, $\vec{v}' = \vec{0}$, ville det ikke vært noen Coriolis-akselerasjon. Hvis $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$, er også Coriolis-akselerasjonen null. Det andre leddet, $-(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$, er sentrifugalakselerasjonen, som avhenger av posisjonen $\vec{r}'$ til ballen i det roterende referansesystemet ($\vec{r}'$ er avstanden til ballen fra rotasjonsaksen). Så hvis ballen hadde forblitt i sentrum av karusellen, ville $\vec{r}' = \vec{0}$ og sentrifugalakselerasjonen ville vært null.

(c) Skriv et program som beregner banen til ballen i det roterende systemet. Programmet skal slutte når ballen forlater karusellen. Det er tilstrekkelig å definere initialbetingelsene og skrive integrasjonsløkka.
(4 poeng)

```python
# Define the arrays we need
# for the angular velocity vector omega,
# the position vector r', velocity v'
# and the time array t.
# The "prime" notation indicates that we are in an accelerated coordinate system
# and not in an inertial system
omega = np.array([0.,0.,omega_z]) #
r_prime = np.zeros((n,3),float)
v_prime = np.zeros((n,3),float)
t = np.zeros((n,1),float)

# Initial condition for r' and v'
# The ball starts in origo, before person A is throwing it
r_prime[0,:] = np.array([0.,0.,0.])
# The initial velocity is v0*j_hat', in the y' direction
# Note that since the ball is starting in origo
# in both the inertial and the rotating system,
# v0' = v0.
# This is not generally true, if the position r0' is different from 0,
# we must correct the initial velocity v0' with the term omega x r'
v_prime[0,:] = np.array([0.,v0,0.])

# Initial condition for the length of the r_prime vector
r_prime_norm = 0.

i = 0   # index for the while loop
while (r_prime_norm<R): # We only want to calculate until the ball reaches the edge of the circle,
    a_coriolis    = -2.*np.cross(omega,v_prime[i,:])    # Coriolis acceleration
    a_centrifugal = -np.cross(omega,np.cross(omega,r_prime[i,:])) # centrifugal acceleration
    a_prime       = a_coriolis + a_centrifugal  # total acceleration
    # here we use the good, old Euler-Cromer method to calculate the next steps
    v_prime[i+1,:] = v_prime[i,:] + a_prime*dt
    r_prime[i+1,:] = r_prime[i,:] + v_prime[i+1,:]*dt
    r_prime_norm = np.linalg.norm(r_prime[i+1,:])
    t[i+1] = t[i] + dt
    i = i+1
```

Oppgave 4 Regneoppgave: Potensialer i 1D og 2D (18 poeng)

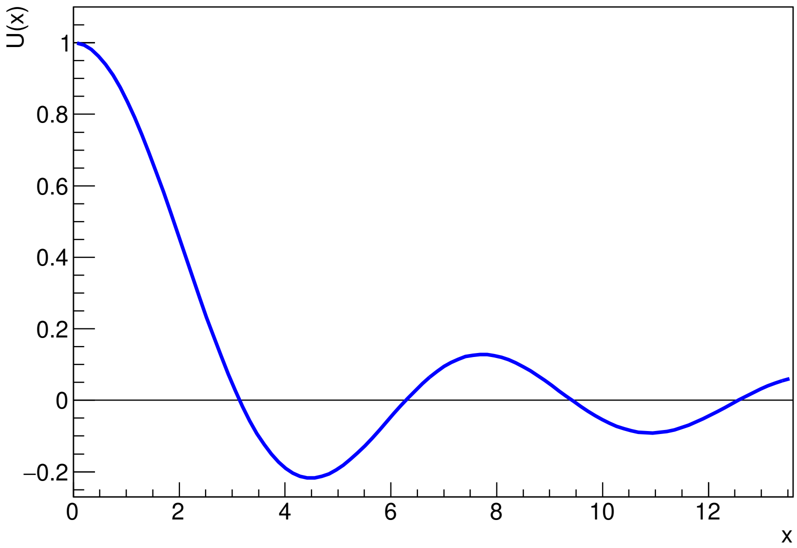
Vi har et endimensjonalt potensial gitt ved

$$U(x) = U_0 \frac{\sin(x/b)}{(x/b)}.$$

For enkelhets skyld setter vi konstantene til $U_0 = 1\text{J}$ og $b = 1\text{m}$, slik at vi i praksis jobber med det dimensjonsløse potensialet

$$U(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Potensialet er plottet i figuren på neste side.



(a) Forklar hvorfor den tilhørende kraften til dette potensialet er konservativ.
(2 poeng)
En kraft (i 1D) er konservativ hvis vi kan finne et potensial slik at

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}.$$

Dette kan vi gjøre her, vi kan derivere potensialet og finne den tilhørende kraften (oppgave (b)). Denne kraften er kun posisjonsavhengig. I 1D er dette en tilstrekkelig betingelse for at kraften er konservativ. For en konservativ kraft er mekanisk energi bevart, og arbeidet kraften gjør er uavhengig av veien.

(b) Vis at den tilhørende kraften til dette potensialet er gitt ved

$$F(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}.$$

(2 poeng)
Vi deriverer potensialet for å finne kraften:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Vi bruker divisjonsregelen for derivasjon og får:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Siden $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ får vi at

$$F(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}.$$

(c) For $x \in [1, 12]$, hvor er likevektspunktene til potensialfunksjonen $U(x)$? Bruk gjerne figuren til å finne disse. Karakteriser likevektspunktene som stabile eller ustabile, og forklar hvorfor de er stabile eller ustabile.
(4 poeng)
Likevektspunktene finner vi der

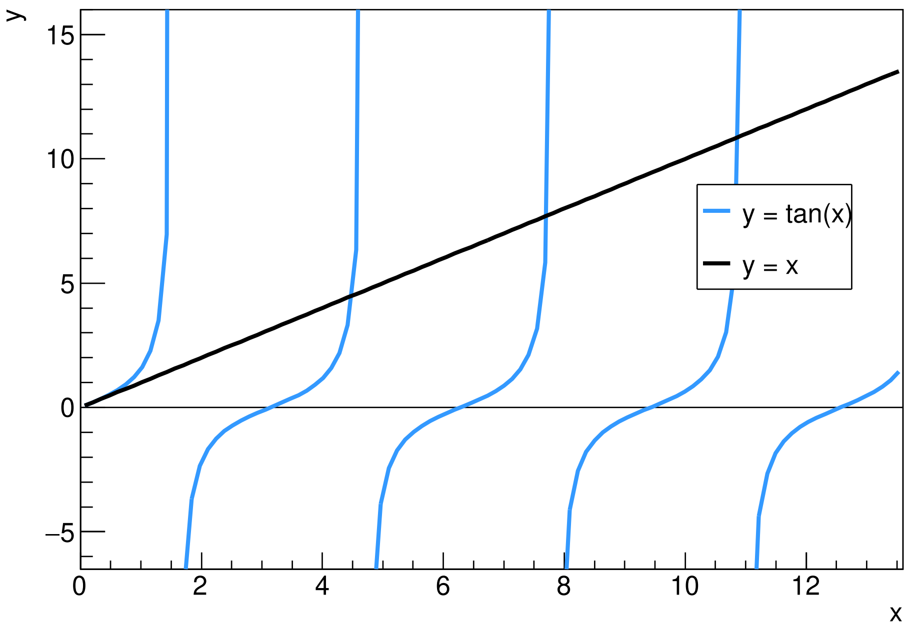
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = 0.$$

Fra figuren ser vi at dette er ved $x_1 \approx 4.5$, $x_2 \approx 7.7$, $x_3 \approx 10.9$. Her er likevektspunktene x_1 og x_3 stabile (lokale minima), med $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$, mens ved x_2 har vi et ustabilt likevektspunkt (lokalt maksimum, $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$). Vi kan også finne minima og makisma ved å sette:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = 0$$

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = 0 \Rightarrow \sin x = x\cos x \Rightarrow \tan x = x.$$

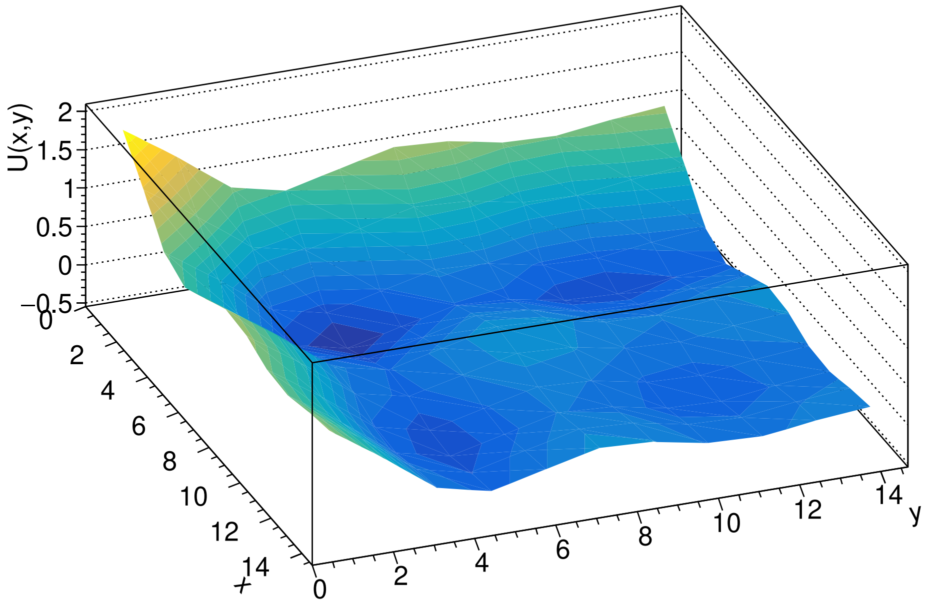
Dette løser vi grafisk, se figur under, og finner hvor $\tan x = x$.



Vi legger nå på en y-komponent på potensialet, som nå blir

$$U(x, y) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin y}{y},$$

se figur neste side.



(d) Finn den tilhørende kraften $\vec{F}(x,y)$.
(4 poeng)
Vi jobber nå med et 2D-potensial, og for å finne kraften må vi nå regne ut gradienten til potensialet for å finne kraften:

$$\vec{F}(x,y) = -\nabla U = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) U = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right) U$$

siden vi her har kun x- og y-variabler. Vi har allerede regnet ut x-komponenten i oppgave (b), og y-komponenten er helt lik som x-komponenten. Vi har da at

$$F_x = -\frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2},$$

$$F_y = -\frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{\sin y - y\cos y}{y^2}.$$

Kraften blir da

$$\vec{F}(x,y) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sin y - y\cos y}{y^2}\hat{\mathbf{j}}.$$

(e) Er denne kraften også konservativ? Hvorfor eller hvorfor ikke? Hva kan du si om likevektspunktene til dette potensialet $U(x,y)$?
(6 poeng)
Nå som vi har en kraft i 2D, er det ikke lenger nok å bare si at den er konservativ fordi den kun er posisjonsavhengig. Generelt må vi sjekke at rotasjonen til kraftfeltet (curlen) er null, eller alternativt (ekvivalent) sjekke at arbeidet som gjøres via to forskjellige veier (linjeintegraler) er like. I dette tilfellet er det rett fram, siden kraften jo er gitt som minus gradienten til potensialet U, nettopp det vi fant i oppgaven over. Vi har alltid at $\nabla \times (\nabla U) = \vec{0}$. Vi kan også se med en gang at curlen må bli null-vektor siden x-komponenten ikke har noen avhengighet av y-komponenten og omvendt. La oss for ordens skyld skrive det opp eksplisitt:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

Siden vi ikke har noen z-avhengighet, har vi kun leddene

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}},$$

og siden F_x kun avhenger av x, og F_y kun avhenger av y, er curlen lik null-vektor og kraften er konservativ.

For å beskrive likevektspunktene, kan vi bruke figuren. Vi tenker oss at vi plasserer en kule i "landskapet" på forskjellige steder og ser hvor den triller om den gis et lite puff. Da finner vi fire stabile likevektspunkter (lokale minima) ved $[x_1, y_1] \approx [4.5, 4.5]$, $[x_1, y_3] \approx [4.5, 10.9]$, $[x_3, y_1] \approx [10.9, 4.5]$, og $[x_3, y_3] \approx [10.9, 10.9]$. Vi har et ustabilt likevektspunkt (lokalt maksimum) ved $[x_2, y_2] \approx [7.7, 7.7]$. Vi har også fire sadelpunkter, ved $[x_1, y_2] \approx [4.5, 7.7]$, $[x_3, y_2] \approx [10.9, 7.7]$, $[x_2, y_1] \approx [7.7, 4.5]$, og $[x_2, y_3] \approx [7.7, 10.9]$. Det går også fint å bruke de partiell-deriverte og bruke 2.derivert-testen for å finne lokale maksima, lokale minima og sadelpunktene. Men vi har ikke gjort det på forelesning (og det er ei heller beskrevet i læreboka), så vi forlanger det selvsagt ikke her heller.

Oppgave 5 Regneoppgave: Kasting av bildekk (22 poeng)

Vi skal teste nye sommerdekk og gjør det ved kaste dem så de sklir og ruller på en glatt overflate. Bildekket har masse M, ytre radius R_1 og indre radius R_2. I regningene setter vi for enkelhets skyld $R_2 = \frac{1}{2}R_1$. Bildekket kastes med en massesenterhastighet $\vec{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{i}}$ parallelt med den glatte overflaten. Selv om bildekket er laget av gummi, er gummien i sommerdekk ganske hard. Vi antar derfor at bildekket kan beskrives som et stivt legeme (hul sylinder). En hul sylinder har treghetsmoment $I_{cm} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ om en rotasjonsakse gjennom massesenteret. Den dynamiske friksjonskoeffisienten er μ_d.

Vi kan dele bevegelsen i tre faser:

1: Umiddelbart etter at bildekket kommer i kontakt med overflaten, er det kun en lineær bevegelse av massesenteret, og bildekket sklir bortover overflaten.

2: Den dynamiske friksjonskraften har et kraftmoment om massesenteret til bildekket, og vil etter kort tid sette i gang en rotasjonsbevegelse. Bildekket vil også skli i tillegg til å rulle i denne fasen.

3: Tilslutt, etter en strekning s målt fra der bildekket først kom i kontakt med overflaten, vil bildekket rulle uten å skli.

Vi ser bort fra luftmotstand gjennom hele oppgaven. Vi skal se på bevegelsen til bildekket fra det øyeblikket det kommer i kontakt med overflaten, og det vil forbli i kontakt hele tiden (det spretter ikke).

(a) Tegn et frilegemediagram for bildekket i fase 1 hvor det bare sklir, og i fase 3 når det ruller uten å skli.
(4 poeng)
Fase 1 (venstre del): tyngdekraft $\vec{G}$, normalkraft $\vec{N}$, og dynamisk friksjonskraft $\vec{f}$.
Fase 3 (høyre del): kun tyngdekraft $\vec{G}$ og normalkraft $\vec{N}$, Siden dekket nå ruller uten å skli, og underlaget er horisontalt, virker det ingen friksjonskraft.

(b) Beregn spinnet til bildekket om kontaktpunktet med overflaten i fase 1, før bildekket har begynt å rotere.
(2 poeng)
Siden det bare er translasjonsbevegelse er spinnet om kontaktpunktet gitt ved

$$L_O = Mv_0R_1.$$

Retningen på spinnet (med koordinatsystemet i figuren):

$$\vec{L}_{O,1} = \vec{r}_O \times \vec{p}_0 = R_1\hat{\mathbf{j}} \times Mv_0\hat{\mathbf{i}} = -R_1Mv_0\hat{\mathbf{k}}.$$

(c) Beregn så spinnet om kontaktpunktet med overflaten i fase 3, når bildekket ruller uten å skli.
(4 poeng)
Her er det både translasjon og rotasjon. Vi vet at det totale spinnet er summen av spinnet om massesenteret og massesenterets spinn om kontaktpunktet:

$$L_{O,3} = Mv_fR_1 + I_{cm}\omega_f = Mv_fR_1 + \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)\frac{v_f}{R_1} = \frac{13}{8}Mv_fR_1$$

når vi bruker at $R_2 = \frac{1}{2}R_1$ (som gir $R_1^2 + R_2^2 = \frac{5}{4}R_1^2$), og vi bruker rullebetingelsen: $v_f = \omega_fR_1 \Rightarrow \omega_f = \frac{v_f}{R_1}$. Retningen på spinnet:

$$\vec{L}_{O,3} = \vec{r}_O \times \vec{p}_f + \vec{L}_{cm} = \vec{r}_O \times \vec{p}_f + I_{cm}\vec{\omega}_f.$$

Vi bruker at $\vec{\omega}_f = -\omega_f \hat{\mathbf{k}}$ og får:

$$\vec{L}_{O,3} = -MR_1 v_f \hat{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)\frac{v_f}{R_1}\hat{\mathbf{k}} = -MR_1 v_f \hat{\mathbf{k}} - \frac{5}{8}MR_1 v_f \hat{\mathbf{k}} = -\frac{13}{8}MR_1 v_f \hat{\mathbf{k}}.$$

(d) Regn ut kraftmomentene om kontaktpunktet til alle kreftene som virker i fase 1 og fase 3, og bruk resultatene fra oppgave (b) og (c) til å vise at hastigheten til bildekkets massesenter når det ruller uten å skli er gitt ved

$$\vec{v}_f = \frac{8}{13}\vec{v}_0.$$

(4 poeng)
Tre krefter virker under bevegelsen: Tyngdekraft, normalkraft og dynamisk friksjon. Både normalkrafta og friksjonen har kraftarm lik null-vektor om kontaktpunktet, og kraftmomentet er derfor null for begge. Tyngdekrafta er antiparallell med sin kraftarm som går fra kontaktpunktet til massesenteret, dermed er dette kraftmomentet også null. Hvis det ikke er noe netto kraftmoment, betyr det at spinnet om kontaktpunktet er bevart (spinnsatsen):

$$\vec{\tau}_{O,net} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0},$$

altså er $L_{O,1} = L_{O,3}$. Dermed får vi

$$R_1 M v_0 = \frac{13}{8}R_1 M v_f \Rightarrow v_f = \frac{8}{13}v_0.$$

Vi har samme retning for v_f som v_0, så

$$v_f \hat{\mathbf{i}} = \frac{8}{13}v_0 \hat{\mathbf{i}}.$$

(e) Finn strekningen s som bildekket beveger seg fra det punktet det kommer i kontakt med overflaten, til det ruller uten å skli.
(4 poeng)
Størrelsen på den dynamiske friksjonskrafta er gitt ved $f = \mu_d N = \mu_d Mg$ hvor vi har brukt $N = Mg$ fra Newtons 2. lov i y-retning. Dermed er akselerasjonen i x-retning gitt ved (igjen fra N2L) $a = \mu_d g$, som er konstant, inntil dekket slutter å gli. Derfor kan vi bruke bevegelsesligningen for konstant akselerasjon:

$$v_0^2 - v_f^2 = 2as$$

som vi kan løse for å finne

$$s = \frac{105}{338}\frac{v_0^2}{\mu_d g}.$$

(f) Finn et uttrykk for tapet i kinetisk energi for bildekket over strekningen s.
(4 poeng)
Tapet i kinetisk energi må være lik arbeidet som friksjonen har gjort over strekningen s. Dette er det samme som endring i kinetisk energi (arbeid-energi-teoremet).

I starten er det kun en lineær bevegelse, slik at den kinetiske energien i fase 1 er gitt ved:

$$K_1 = \frac{1}{2}Mv_0^2.$$

I fase 3, akkurat når dekket begynner å rulle uten å skli, er det både lineærbevegelse og rotasjonsbevegelse. Vi får:

$$K_3 = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_f^2 = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)\right)\left(\frac{v_f}{R_1}\right)^2$$

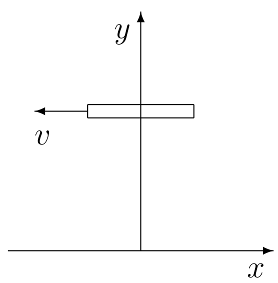
$$= \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{4}M\frac{5}{4}R_1^2\frac{v_f^2}{R_1^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{8}Mv_f^2 = \frac{1}{2}M\frac{8}{13}v_0^2 = \frac{8}{13}K_1.$$

Dermed er den tapte energien (dvs. det negative arbeidet den dynamiske friksjonskrafta gjør):

$$\Delta K = K_3 - K_1 = -\frac{5}{13}K_1.$$

Det går også an å regne ut den delen av strekningen s hvor bildekket har sklidd, da må man trekke fra den lengden som bildekket har rotert (ettersom det både ruller og sklir). Så kan man regne ut arbeidet den dynamiske friksjonskrafta gjør over denne (kortere) strekningen og få samme svar som over.

Oppgave 6 Regneoppgave: En relativistisk stav (8 poeng)



En observatør står i ro i origo. En stav med egenlengden l_0 beveger seg med en hastighet $v = 0.8c$ i negativ x-retning. Staven er parallell med x-aksen, og ligger i en avstand d fra x-aksen.

(a) Hvor lang er staven, ifølge observatøren?
(2 poeng)
Observatøren vil si at stanga er Lorentzkontrahert og har lengden $l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0.6l_0$.

Staven har lysdioder i endene, og de sender ut et kort lysblink. En observatør som beveger seg med staven mener at de to lysblinkene skjedde samtidig, og samtidig med at midten av staven passerte y-aksen.

(b) For observatøren i ro, når og hvor ble de to lysblinkene sendt ut? Hvilken av lysdiodene vil han si blinket først? (Merk at vi her snakker om koordinatene til hendelsene i observatørens referansesystem, ikke når han ser lysblinkene).
(6 poeng)

Vi lar umerkede koordinater gjelde for observatøren i ro, og merkede koordinater for en observatør som beveger seg med staven. Nullpunktet for tida er satt til det tidspunktet der midten av staven passerer y-aksen. Dette er det samme som når origo i de to systemene passerer hverandre (det er begge observatørene enige om). Da vet vi at lysblinkene har koordinatene $t' = 0$ og $x'_\pm = \pm l_0/2$. Lorentztransformasjonen gir da

$$\begin{aligned} x_\pm &= \gamma(x'_\pm - vt') = \pm\gamma l_0/2 \\ t_\pm &= \gamma(t' - vx'_\pm/c^2) = \mp\gamma v l_0/2c^2 \end{aligned}$$

Observatøren i ro vil altså mene at det høyre blinket skjer før det venstre.

Eksamenssett slutt.