UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag ACL & JB.

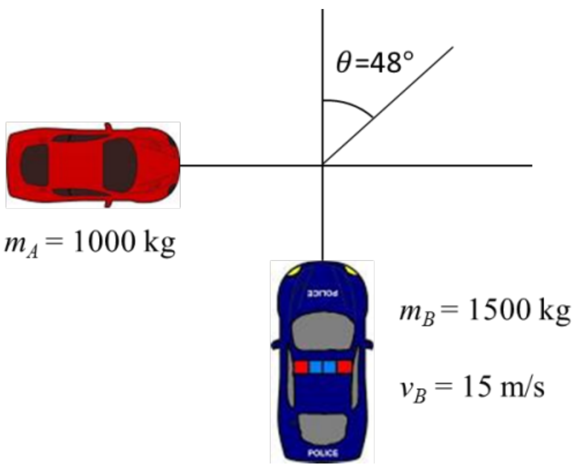
(Siste oppdatering 30.mai, kommentar til oppgave 5: prosjektilet setter seg fast i døra, og døra og prosjektilet vil så bevege seg som ett legeme som vist i figuren.)

Skriftlig eksamen i FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2023
Dato: Tirsdag 30. mai 2023, kl 15:00-19:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 4 sider (formelark bakerst på side 5).
Tillatte hjelpemidler: Øgrim og Lian: "Størrelser og enheter i fysikk og teknikk" eller
Angell, Lian, Øgrim: "Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler"
Rottmann: "Matematisk formelsamling".
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.
Husk at alle svar må begrunnes!
Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 To biler kolliderer

En liten sportsbil på 1000 kg kjører med ukjent hastighet v_A fra vest til øst. En politibil på 1500 kg kjører med hastighet $v_B = 15$ m/s fra sør til nord. I et kryss krasjer bilene og henger sammen etter kollisjonen. Sportsbilsjåføren påstår at han ikke kjørte over fartsgrensen på 50 km/h = 13.9 m/s. Politibetjenten, som har tatt FYS-MEK1110, ser på bremsesporene og måler at bilene beveget seg med vinkelen $\theta = 48°$ i nordøstlig retning etter krasjet. På grunn av dette pågriper politibetjenten sportsbilsjåføren. Hvor fort kjørte sportsbilsjåføren?



Løsning: Identisk med "Test deg selv"-oppgave T3 ukesett 8. Det virker ingen netto ytre krefter i horisontal retning, derfor er bevegelsesmengde bevart. Bevaring av bevegelsesmengde gjelder separat i x-retning (retningen til sportsbilen)

$$m_A v_A = (m_A + m_B) v \sin\theta$$

og y-retning (retningen til politibilen)

$$m_B v_B = (m_A + m_B) v \cos\theta.$$

Deler vi likningene på hverandre får vi

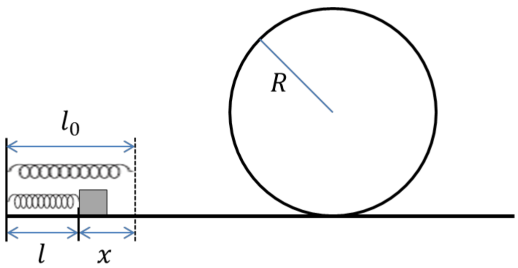
$$\frac{m_A v_A}{m_B v_B} = \tan\theta$$

som gir

$$v_A = \frac{m_B}{m_A} v_B \tan\theta = 25 \text{ m/s}.$$

Oppgave 2 En kloss, en fjær, og en loop

En liten kloss med masse m dyttes inn en fjær som følger Hookes lov, og som har likevektslengden l_0 og fjærkonstant k. Når klossen dyttes inn i fjæren blir den komprimert til en lengde l, og lengden x er lengden som fjæren blir komprimert, slik at $x = l_0 - l$, se figur. Klossen er ikke festet ~~ikke festet~~ i fjæren, og når systemet slippes fri beveger klossen seg uten friksjon og uten luftmotstand på en horisontal flate.



(a) Vis at farten v_0 til klossen rett etter at den har mistet kontakt med fjæren er gitt ved

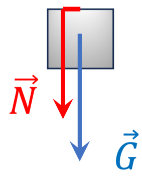
$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} x.$$

Løsning: Siden det kun er konservative krefter som gjør et arbeid på klossen, er mekanisk energi bevart, slik at potensiell energi fra fjæren går over til kinetisk energi til klossen:

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} x.$$

(b) Etter å ha sklidd et lite stykke på den horisontale flaten, går klossen gjennom en loop med radius R. Vi antar at det ikke er noe friksjon i loopen heller. Tegn et frilegemediagram for klossen når den befinner seg i det høyeste punktet av loopen. Husk å navngi alle krefter.

Løsning: Vi har normalkraft $\vec{N}$ fra kontakten med loopen, og tyngdekraft $\vec{G}$.



(c) Finn et uttrykk for farten v_1 til klossen i det høyeste punktet av loopen.

Løsning: Vi bruker igjen at mekanisk energi er bevart:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg2R \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 4gR$$

Setter inn for v_0 som vi fant i forrige deloppgave og får:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 4gR}.$$

(d) Hvor stor må farten v_1 minst være for at klossen klarer å komme seg gjennom loopen uten å falle ned?

Løsning: Vi har betingelsen at normalkraften må være større enn null for at klossen fortsatt skal være i kontakt med banen. Både tyngdekraft og normalkraft er rettet nedover. Kreftene er årsak til sentripetalakselerasjonen som holder klossen på sirkelbanen. Vi bruker Newtons andre lov:

$$-mg - N = -m\frac{v_1^2}{R}$$

Betingelsen for at blokken holder kontakt er at $N > 0$

$$N = m\frac{v_1^2}{R} - mg > 0 \Rightarrow v_1 > \sqrt{Rg}.$$

(e) Hva må lengden x være for at klossen klarer å komme seg gjennom loopen?

Løsning: Vi bruker resultatene fra deloppgave c) og d) og får:

$$\sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 4gR} = \sqrt{Rg}$$

Kvadrerer på begge sider og løser for x:

$$\frac{k}{m}x^2 - 4gR = Rg$$

$$x^2 = 5Rg\frac{m}{k} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5Rgm}{k}}$$

Oppgave 3 En satellitt i bane

En satellitt beveger seg i en sirkelbane rundt Jorda. Du diskuterer med fire venner om gravitasjonskraften fra Jorda gjør et arbeid på satellitten i løpet av en periode. Du får følgende svar:
Venn 1: "Gravitasjonskraften fra Jorda gjør et positivt arbeid på satellitten."
Venn 2: "Gravitasjonskraften fra Jorda gjør et negativt arbeid på satellitten."
Venn 3: "Gravitasjonskraften fra Jorda gjør et positivt arbeid i en del av banen, og et negativt arbeid i resten av banen."
Venn 4: "Gravitasjonskraften fra Jorda gjør null arbeid på satellitten under hele bevegelsen."

(a) Hvilken av vennene har rett? Begrunn svaret!

Løsning: Venn 4 har rett. Gravitasjonskraften peker hele tiden inn mot sentrum av sirkelen, og står derfor normalt på hastighetsvektor (som alltid er tangentiell til banen) i et hvert punkt. Arbeidet er derfor null alle steder på sirkelbanen.

(b) Dersom satellitten gikk i en elliptisk bane, er det da flere av vennenes svar som er riktig? I så fall, hvorfor?

Løsning: I dette tilfellet har også Venn 3 rett. Gravitasjon er en konservativ kraft, og mekanisk energi er bevart. Men den potensielle energien forandrer seg ettersom satellittens avstand r fra brennpunktet i ellipsen ikke lenger er konstant:

$$U(\vec{r}) = -\gamma\frac{mM}{r},$$

hvor γ er gravitasjonskonstanten, m er satellittmassen og M er massen til Jorda. Dermed vil også den kinetiske energien forandre seg (øker når potensiell energi minker og omvendt). Dermed gjør gravitasjonskraften et positivt arbeid i en del av banen, og et negativt arbeid i resten av banen. Hvis vi ser på en hel periode, er summen av arbeidet gravitasjonen gjør lik null. I et gitt punkt på banen vil satellitten ha samme fart, og dermed $K_1 - K_0 = 0$.

(c) Skissér en kode som beregner hastigheten og posisjonen til satellitten. Koden skal kunne beskrive både sirkelbane og elliptiske baner. Koden skal også beregne arbeidet som gravitasjonskraften gjør for hvert steg i løkka for å teste påstandene til vennene dine. Du trenger ikke å skrive en fullt kjørende kode, det er tilstrekkelig å ta med initialbetingelsene, og sette opp selve løkka med en numerisk integrasjonsmetode for å beregne hastighet, posisjon, og arbeidet gravitasjonen gjør.

Løsning: Her må vi passe på at vi regner ut akselerasjonen riktig i alle stegene. Dvs. vi må bruke Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

her er γ gravitasjonskonstanten, m massen til satellitten og M massen til sola. Tyngdekraft er den eneste kraften som virker, så akselerasjonen til satellitten blir etter Newtons 2. lov:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

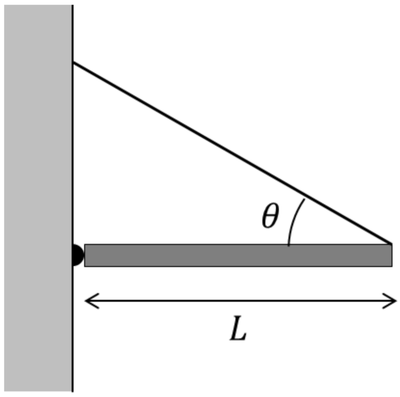
Posisjonsvektor $\vec{r}$ har i prinsippet både en x, y, z-komponent, og starthastigheten vil avgjøre hva slags bane (sirkelbane eller ellipsebane) som satellitten vil få. Siden gravitasjon er en konservativ kraft som kun avhenger av posisjon, kan vi integrere opp $W_{0,1} = \int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{r}$ for å finne arbeidet. For å teste påstandene kan vi sjekke hvor mye arbeid vi får etter en periode, dvs. når startposisjon er lik sluttposisjon.

```
r[0, :] = r0 # Startposisjonen til satellitten
t[0] = 0
v[0, :] = v0
a[0, :] = 0
W[0] = 0

for i in range (0,n-1):
        r_norm = np.linalg.norm(r[i, :])
        a[i, :] = -gamma*M*r[i, :]/r_norm**3
        v[i+1, :] = v[i, :] + a[i, :]*dt
        # Euler-Cromer
        r[i+1, :] = r[i, :] + v[i+1, :]*dt
        # Arbeid
        W[i+1] += np.dot(m*a[i, :],(r[i+1, :]-r[i, :]))
        if r[i+1, :] == r[0, :]:
                print("Arbeid gjort av gravitasjon = ", W[i+1])
        t[i+1] = t[i] + dt
```

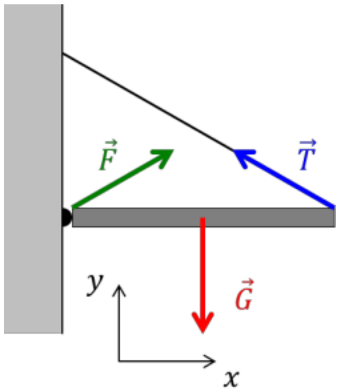
Oppgave 4 En stang

En stang med lengde L og masse m er festet i veggen. Stangen er festet i et hengsel på veggen i den ene enden og et tau i den andre enden som vist i figuren. Vinkelen mellom tauet og stangen er θ.



(a) Tegn et frilegemediagram for stangen. Husk å navngi alle krefter.

Løsning: Vi har tyngdekraft $\vec{G}$, tauspenning $\vec{T}$, og en kontaktkraft $\vec{F}$ fra hengselet.



(b) Finn størrelsen på tauspenningen (snordraget) uttrykt ved massen m, vinkelen θ og tyngdeakselerasjonen g.

Løsning: Siden stangen er i ro, har vi likevekt og summen av alle krefter og kraftmoment må være null. Newtons 2. lov i horisontal (x-)retning:

$$F_x - T\cos\theta = 0$$

I vertikal (y-)retning:

$$F_y + T\sin\theta - G = 0$$

Så ser vi på kraftmoment om hengselet. Da er det kun tauspenning og gravitasjon som gir et kraftmoment, siden kraftarmen er null for kraften $\vec{F}$. Summen av kraftmomentene må være null, så vi får:

$$LT\sin\theta - \frac{L}{2}G = 0.$$

Med $G = mg$ får vi da at

$$T = \frac{mg}{2\sin\theta}.$$

(c) Finn den vertikale og den horisontale komponenten til kraften fra hengselet på stangen, og bestem også størrelsen (absoluttverdien) til denne kraften.

Løsning: Vi bruker resultatet fra forrige oppgave og setter inn i N2L-ligningene vi satte opp:

$$F_x = \frac{mg}{2\sin\theta}\cos\theta = \frac{mg}{2\tan\theta}.$$
$$F_y = G - \frac{mg}{2\sin\theta}\sin\theta = \frac{mg}{2}.$$

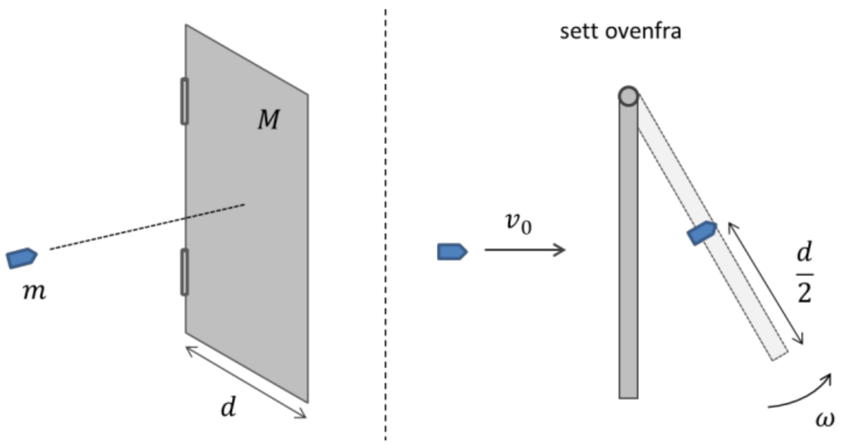
Absoluttverdien:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = \left(\frac{mg\cos\theta}{2\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{mg}{2}\right)^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2\left(\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + 1\right) = \left(\frac{mg}{2\sin\theta}\right)^2 = T^2.$$

Kraften fra hengselet har samme størrelse som tauspenningen.

Oppgave 5 Et prosjektil og en dør (12 poeng)

Et prosjektil med masse m skytes med fart v_0 vinkelrett på en dør (se figur). Døren har masse $M = 3m$ og bredde d, og den kan rotere fritt uten friksjon om en vertikal akse som går gjennom hengslene. Prosjektilet treffer døren akkurat i sentrum og stanses[1] der. Treghetsmomentet til døren for en rotasjon om aksen gjennom hengslene er $I = \frac{1}{3}Md^2$.



(a) Diskuter hvilke av følgende størrelser er bevart under kollisjonen mellom prosjektilet og døren: mekanisk energi, bevegelsesmengde, spinn. Husk å begrunne svarene dine!

Løsning: Prosjektilet fester seg i døren, og prosjektil pluss dør beveger seg som ett legeme etter kollisjonen. Kollisjonen er derfor fullstendig uelastisk og mekanisk energi er ikke bevart. Det virker ytre krefter fra hengslene på døren under kollisjonen og derfor er

[1] Dvs. setter seg fast i døren og dør + prosjektil beveger seg som ett legeme etterpå.

bevegelsesmengden ikke bevart. Kreftene fra hengslene gir ingen kraftmoment om rotasjonsaksen (som går gjennom hengslene), og det er heller ingen andre ytre krefter som gir noe kraftmoment om rotasjonsaksen. Derfor er spinnet om rotasjonsaksen gjennom hengslene bevart.

(b) Vis at treghetsmomentet til døren om aksen gjennom hengslet med prosjektilet sittende fast i sentrum er

$$I = \frac{5}{4} m d^2.$$

Løsning: Her bruker vi superposisjonsprinsippet, altså at vi legger sammen treghetsmomentene om rotasjonsaksen for døra og for prosjektilet hver for seg og summerer. For døra har vi fått oppgitt at treghetsmomentet om rotasjonsaksen gjennom hengselet er $I = \frac{1}{3} M d^2$. Så vet vi at kula har satt seg fast i døra i en avstand $d/2$. Vi kan regne at prosjektilet er som en punktpartikkel, og definisjonen på treghetsmomentet om en rotasjonsakse z er $I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$, hvor ρ_i er avstanden til massebit m_i fra rotasjonsaksen. Her har vi kun én massebit og vi får:

$$I_{\text{prosj}} = m \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Vi legger sammen de to treghetsmomentene og får:

$$I_{\text{tot}} = I + I_{\text{prosj}} = \frac{1}{3} M d^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3md^2}{3} + \frac{md^2}{4} = \frac{5}{4} m d^2.$$

(c) Finn vinkelfarten ω til døren etter kollisjonen. Uttrykk vinkelfarten som funksjon av farten til prosjektilet v_0 og bredden på døren d.

Løsning: Spinnet rett før prosjektilet treffer døra er gitt ved prosjektilets spinn $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$. Prosjektilet treffer i en avstand $r = d/2$, og bevegelsesmengden (som står normalt på $\vec{r}$) før kollisjonen er $m\vec{v}_0$. Så vi får at størrelsen til det totale spinnet rett før kollisjonen for systemet dør + prosjektil er

$$L_{\text{før}} = \frac{d}{2} m v_0.$$

Etter kollisjonen beveger prosjektil + dør seg som ett legeme, og begynner å rotere om rotasjonsaksen gjennom hengslene. Vi får da:

$$L_{\text{etter}} = I_{\text{tot}} \omega.$$

Setter disse lik hverandre og får:

$$\frac{d}{2} m v_0 = \frac{5}{4} m d^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{2}{5} \frac{v_0}{d}$$

Oppgave 6 Partikkeldannelse
Et pion (en partikkel sammensatt av to kvarker) blir dannet i en kollisjon mellom høyenergetiske protoner i en partikkelakselerator. Etter at pionet er dannet, beveger pionet seg med en konstant hastighet v som er nær lysets hastighet c før det henfaller. I et referansesystem som følger pionet (hvor pionet er i ro) har pionet en levetid τ. En observatør i laboratoriet måler henfallet i en avstand d fra kollisjonspunktet. Vi har to hendelser:
Hendelse 1: pionet blir dannet.
Hendelse 2: pionet henfaller ("dør", blir omdannet til andre partikler).

(a) Hva er pionets levetid målt i laboratoriesystemet?

Løsning: I laboratoriesystemet S beveger pionet seg med hastighet v og levetiden er lenger på grunn av tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \gamma\tau$, hvor $\Delta t_0 = \tau$ er egentiden.

(b) Finn et uttrykk for hastigheten v til pionet som funksjon av avstanden d og konstantene τ og c.

Løsning: I laboratoriesystemet S beveger pionet seg en strekning d mellom hendelse 1 og 2 og bruker en tidsperiode $\Delta t = \gamma\tau$ for denne strekningen. Hastigheten blir dermed:

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{\gamma\tau} = \frac{d}{\tau}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v^2\tau^2 = d^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$v^2\left(\tau^2 + \frac{d^2}{c^2}\right) = d^2 \Rightarrow v = \frac{d}{\sqrt{\tau^2 + \frac{d^2}{c^2}}}.$$

Eksamenssett slutt.

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,)$

Galilei-transformasjon, referansesystemer: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Statisk friksjon: $|\vec{F}_s| \le \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|\vec{F}_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Effekt: $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk rotasjonsenergi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = \omega R$

Fiktive krefter: $m\vec{a}\,' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\,\vec{\alpha} \times \vec{r}\,' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}$; G er gravitasjonskonstanten

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz-transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

Lorentz-transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}$