UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Utsatt, skriftlig eksamen i FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2022
Dato: Torsdag 18. august 2022, kl. 15:00-19:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 5 sider (formelark bakerst på side 6).
Tillatte hjelpemidler: Øgrim og Lian: "Størrelser og enheter i fysikk og teknikk" eller Angell, Lian, Øgrim: "Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler"
Rottmann: "Matematisk formelsamling" Elektronisk kalkulator av godkjent type.
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes!
Lykke til!

Oppgave 1 Flervalgsoppgaver (12 poeng)
Her ber vi deg om å velge det svaret du mener er riktig, og at du forklarer *hvorfor* det valgte svaret er riktig. Du får 1 poeng for riktig svaralternativ og 2 poeng for riktig forklaring.

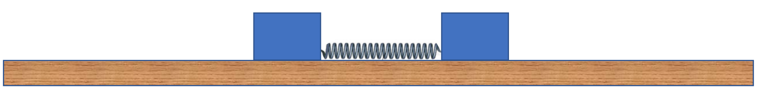
1.1 En nettokraft $\vec{F}_{net} \neq \vec{0}$ virker på et legeme med masse m. Hvilken av påstandene under er riktig? Husk å begrunne svaret.

(a) Farten til legemet kan være konstant.
(b) Hastigheten til legemet kan være konstant.
(c) Verken farten eller hastigheten til legemet kan være konstant.
(d) Akselerasjonen til legemet kan være null.

(3 poeng)

1.2 To klosser er presset sammen med en fjær i mellom, men uten at klossene er festet i fjæren. Systemet bestående av de to klossene og fjæren slippes så fri på et horisontalt bord uten friksjon (se figur). Mens de to legemene fjerner seg fra hverandre og fra fjæren:

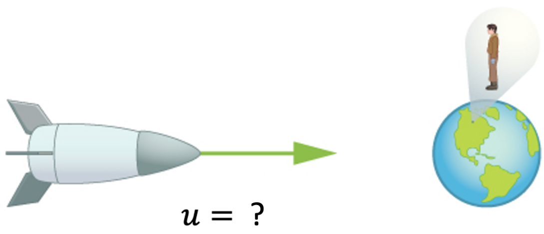
(a) er bare bevegelsesmengden i systemet bevart.
(b) er bare den mekaniske energien i systemet bevart.
(c) er både den mekaniske energien og bevegelsesmengden til systemet bevart.
(d) er den kinetiske energien til systemet bevart.



(3 poeng)

1.3 En rakett beveger seg med en veldig stor hastighet u relativt til Jorda, slik at tiden i raketten bare går halvparten så raskt som tiden for en observatør på Jorda. Relativhastigheten u til raketten er

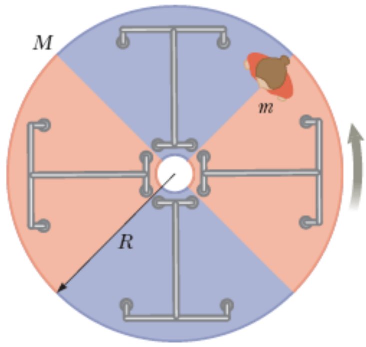
(a) $u = \frac{1}{2}c$
(b) $u = \frac{3}{2}c$
(c) $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$
(d) $u = \frac{\sqrt{2}}{3}c$
(e) $u = \sqrt{2}c$



(3 poeng)

1.4 Et barn står på en karusell som roterer uten friksjon. Barnet går sakte mot karusellens senter. Hvordan endrer spinnet til hele systemet seg (barn + karusell) mens barnet beveger seg innover?

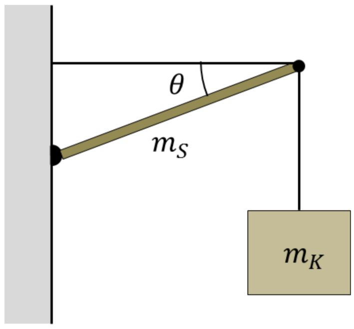
(a) Spinnet øker.
(b) Spinnet minker.
(c) Spinnet er konstant.



(3 poeng)

Oppgave 2 Tekstoppgave: Referansesystemer og fiktive krefter (6 poeng)
En edderkopp går på et skjenebrett (Frisbee-skive), som noen kaster gjennom luften om bord et skip, som ruller og stamper i tung sjø på jorden, som roterer om sin akse på veien rundt solen, som befinner seg ut i en spiralarm til melkeveien, som roterer om et svart hull i sentrum av galaksen, som akselererer gjennom universet. Diskuter mulige referansesystemer for disse situasjonene. Hvilke av dem er inertialsystemer? Vil tiden som bevegelsen tar ha noe å si for valg av referansesystemet?

Oppgave 3 Regneoppgave: En kiste i ei snor (13 poeng)
En kiste med masse m_k henger i ei masseløs snor over en homogen støttestav med masse m_s som vist i figuren. Vinkelen mellom staven og horisontalen er θ. Tyngdeakselerasjonen er g.



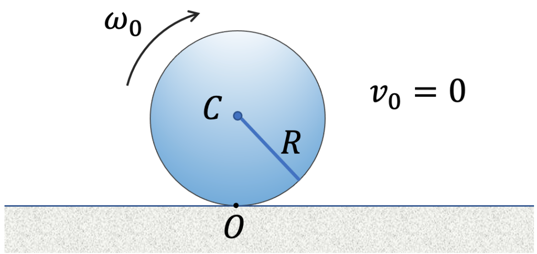
(a) Tegn et frilegemediagram til staven og navngi alle krefter.
(4 poeng)

(b) Finn snordraget i både den vertikale og horisontale delen av snoren.
(5 poeng)

(c) Finn kraften fra hengselet (som er festet i veggen) på støtten. Uttrykk kraften som en vektor.
(4 poeng)

Oppgave 4 Regneoppgave: Ei roterende kule (22 poeng)
Ei homogen kule med masse M og radius R roterer om sitt massesenter C med vinkelfart ω_0. Kulas treghetsmoment om en akse gjennom massesenteret er $I_C = \frac{2}{5}MR^2$. Den roterende kula settes forsiktig ned på et horisontalt underlag, se figur, hvor det første berøringspunktet kalles O. Massesenterets starthastighet er lik null.

Til å begynne med både ruller og glir kula mot høyre, men etter en tid gjør friksjonen at kula får en rent rullende bevegelse.



(a) Tegn et frilegemediagram for kula i det den kommer i kontakt med underlaget i punktet O. Husk å navngi alle krefter.
(4 poeng)

(b) Hva er kulas spinn L_O om punktet O umiddelbart før den berører underlaget?
(4 poeng)

(c) Bruk spinnsatsen om O til å vise at kulas vinkelfart når kula har gått over i en ren rullebevegelse er

$$\omega = \frac{2}{7}\omega_0.$$

(4 poeng)

(d) Finn avstanden d som kulas massesenter har beveget seg før kula har gått over i en ren rullebevegelse. Den dynamiske friksjonskoeffisienten er μ_d.
(4 poeng)

(e) Hva er forandringen i den kinetiske energien til kula over denne avstanden d? Forklar kort hvorfor dette ikke er det samme som produktet av friksjonskraften og veilengden d.
(6 poeng)

Oppgave 5 Et ion i et potensial (28 poeng)
Et lite ion med masse m beveger seg mot et stort molekyl som er så massivt at det forblir i ro under hele prosessen. Vi velger massesenteret til molekylet som origo i vårt koordinatsystem. I det endimensjonale tilfellet beveger ionet seg langs x-aksen og vekselvirkningen mellom ionet og molekylet kan beskrives ved det en-dimensjonale potensialet

$$U(x) = \frac{B}{x},$$

der B er en positiv konstant. Ionet starter ved posisjonen $x = x_0$ med hastighet $\vec{v}_0$, hvor $x_0 > 0$ og $\vec{v}_0 = -v_0\hat{\mathbf{i}}$. Du kan neglisjere alle andre krefter som virker på ionet.

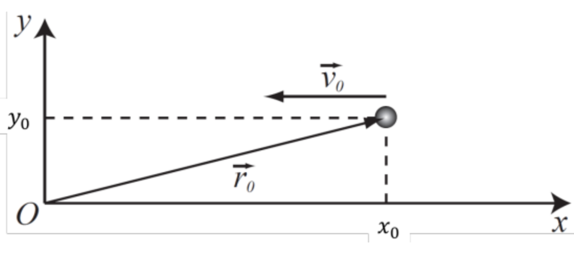
(a) Skissér potensialet og beskriv bevegelsen til ionet.
(3 poeng)

(b) Finn kraften fra molekylet som virker på ionet. Finnes det noen likevektspunkter? I så fall, for hvilke(n) x finnes de(n)?
(3 poeng)

(c) Hva er den kortest mulige avstanden mellom ionet og molekylet?
(3 poeng)

(d) Hva er hastigheten til ionet etter en lang tid etter kollisjonen med molekylet?
(3 poeng)

Vi ser nå på samme prosess i to dimensjoner. Ionet starter i posisjon $\vec{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}}$ med hastighet $\vec{v}_0 = -v_0\hat{\mathbf{i}}$, der $x_0 > y_0$ (se figur).



Den potensielle energien til ionet beskrives nå ved

$$U(\vec{r}) = \frac{B}{r},$$

der $B > 0$ og $r = |\vec{r}|$. Igjen kan du neglisjere alle andre vekselvirkninger.

(e) Vis at kraften på ionet er gitt som

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{B}{r^3}\vec{r}.$$

(3 poeng)

(f) Skissér en kode for å finne posisjonen og hastigheten til ionet som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å sette opp initialbetingelsene og integrasjonsløkka.
(6 poeng)

(g) Skissér banen til ionet som starter fra samme posisjon, $x_0 = 3\text{m}$ og $y_0 = 1\text{m}$, men med henholdsvis liten og stor fart.
(4 poeng)

(h) Hvordan vil bevegelsen forandre seg dersom konstanten B er negativ, $B < 0$?
(3 poeng)

Eksamenssett slutt.

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,)$

Galilei-transformasjon, referansesystemer: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Statisk friksjon: $|\vec{F}_s| \le \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|\vec{F}_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk rotasjonsenergi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = \omega R$

Fiktive krefter: $m\vec{a}\,' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\,\vec{\alpha} \times \vec{r}\,' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$; G er gravitasjonskonstanten

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz-transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y, z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentz-transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v-u}{1-\frac{u}{c^2}v}$