UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS-MEK1110
Eksamensdag: Mandag 30. mars 2009
Tid for eksamen: Kl. 1500-1800
Oppgavesettet er på 3 sider + formelark
Tillatte hjelpemidler: Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller
Angell, Lian, Øgrim: Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler
Rottmann: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

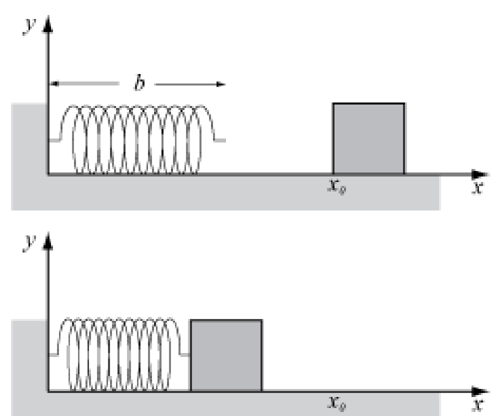
Ved sensur vil alle deloppgaver bli tillagt like stor vekt med mindre annet er oppgitt i oppgaven. Vi forbeholder oss retten til justeringer.

Du må i oppgavene begrunne dine svar. Ubegrunnede svar gir liten uttelling.

På denne eksamenen skal vi studere en kollisjon mellom to identiske partikler (atomer) som begge påvirkes av krefter fra en massiv, stasjonær partikkel (f.eks. et molekyl). Vi skal gjøre dette i to steg. I oppgave 1 skal vi studere en enkel mekanisk modell som også illustrerer vekselvirkningen mellom en massiv partikkel og et atom, mens i oppgave 2 studerer vi en kollisjonsprosess for partikler i et mer realistisk potensial.

Oppgave 1

En kloss med masse m sklir på et friksjonsfritt bord som illustrert i figuren. En masseløs fjær med fjærkonstant k og likevektslengde b er festet i veggen ved $x = 0$. I begynnelsen av prosessen ligger fjæren i ro og den har lengden b. I det klossen treffer fjæren fester den seg til fjæren. Klossen starter ved posisjonen $x(t_0) = x_0$ med hastigheten $v(t_0) = -v_0$ ved tiden $t = t_0 = 0$ s. Du kan se bort fra luftmotstand.



a) Identifiser kreftene på klossen og tegn et frilegemediagram for klossen før den treffer fjæren og etter at den har truffet fjæren.

b) Finn posisjonen $x(t)$ til klossen som funksjon av tiden før klossen treffer fjæren.

c) Klossen treffer fjæren ved tiden $t = t_1$. Finn t_1.

d) Vis at akselerasjonen til klossen etter at den har truffet fjæren kan skrives som:
$a = -\frac{k}{m}(x-b)$.

e) Skisser posisjonen til klossen som funksjon av tiden fra $t = t_0$. Hva er fjærens maksimale kompresjon?

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven se på en kollisjon mellom to identiske atomer med masse m som begge er påvirket av krefter fra en massiv partikkel, f.eks. et molekyl.

Først ser vi på oppførselen til et enkelt atom som er påvirket av krefter fra et molekyl. Den potensielle energien for vekselvirkningen mellom atomet og molekylet er:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & når \quad x < b-d \\ \frac{1}{2}k(x-b)^2 & når \quad b-d < x < b+d \\ U_0 & når \quad x > b+d \end{cases}$$

hvor $U_0 = \frac{1}{2}kd^2$ og x er posisjonen til atomet. Vi antar at molekylet ligger fast i punktet $x = 0$. (Atomet kan ikke komme inn i området hvor potensialet er uendelig).

a) Skisser potensialet. Tegn inn en bevegelse hvor totalenergien er mindre enn U_0 og en bevegelse hvor totalenergien er større enn U_0 og beskriv bevegelsene kort.

b) Finn kraften $F(x)$ på atomet som funksjon av atomets posisjon x

Vi skal nå studere en kollisjon mellom et atom (B) med masse m som ligger i ro i punktet $x_B = b$ og et identisk atom (A) som starter ved $x_A > b+d$ med en hastighet $-v_{A,0}$. For hvert av atomene kan vekselvirkningen med molekylet uttrykkes ved den potensielle energien $U(x)$, slik at den potensielle energien til atom A er $U(x_A)$ og den potensielle energien til atom B er $U(x_B)$. Det er ingen langtrekkende vekselvirkninger mellom atomene. De vekselvirker kun når de er i samme punkt, $x_A = x_B$, og da kolliderer de. Etter kollisjonen henger atomene sammen. Du kan anta at atomene ikke har beveget seg nevneverdig i løpet av kollisjonen.

c) Finn hastigheten til atom A i punktet $x_A = b$ umiddelbart før kollisjonen.

d) Finn hastighetene til atom A og til atom B umiddelbart etter kollisjonen.

e) Hvor stor må $v_{0,A}$ være for at atom B skal løsrive seg fra molekylet etter kollisjonen? (Atomet er løsrevet hvis det kan bevege seg vilkårlig langt vekk fra molekylet.)

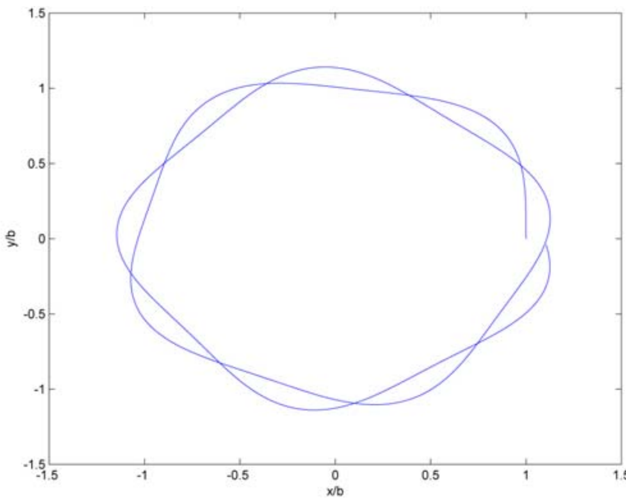
Vi skal nå studere den samme prosessen, men i to dimensjoner. Det massive molekylet ligger i ro i origo, og den potensielle energien til et atom har samme formen som ovenfor, men er nå en funksjon av atomets avstand, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, til origo:

$$U(r)=\begin{cases}\infty & \textit{når} \quad r<b-d \\ \frac{1}{2}k(r-b)^2 & \textit{når} \quad b-d<r<b+d \\ U_0 & \textit{når} \quad r>b+d\end{cases}$$

f) Vis at kraften på atomet kan skrives som $\vec{F}(\vec{r})=-k(r-b)\frac{\vec{r}}{r}$ når $b-d<r<b+d$.

g) (Denne deloppgaven teller som 4 deloppgaver) Atomet starter med hastigheten $\vec{v}_0$ i posisjonen $\vec{r}_0$ ved tiden $t=0$. Skriv et program som finner posisjonen til atomet som funksjon av tiden. Bruk fortrinnsvis Matlab eller Python og gjør det klart hvordan du representerer vektorer. Vis også hvordan du plotter banen til atomet.

h) Vi bruker programmet til å gjøre en simulering hvor $\vec{r}_0=(b,0)$ og $\vec{v}_0=(0,v_0)$. Du ser resultatet i figuren til høyre. Forklar resultatet. Hvordan vil du gå fram for å måle periodetiden for denne bevegelsen i programmet ditt? (Her behøver du kun forklare hvordan det kan gjøres, du behøver ikke skrive koden).



i) Du ønsker at atomet skal gå i en sirkelbane om molekylet med farten v. Hvilke initialbetingelser må du velge for å få dette til? Kan du få dette til for enhver fart v? Begrunn svaret.

Vi antar at atom A, som vi følger bevegelsen til, kolliderer med atom B som ligger i ro i avstanden $r_B=b$. Atom B er plassert slik at kollisjonen inntreffer idet $r_A=r_B=b$. Kollisjonen kan modelleres som et sentralt støt, og atomene henger sammen etter støtet.

j) Hvordan vil du modifisere programmet ditt for å modellere bevegelsen til atomet A før og etter kollisjonen?

k) Atom A starter med hastigheten $\vec{v}_0$ i posisjonen $\vec{r}_0$ ved tiden $t=t_0$ og kolliderer med atom B ved tiden $t=t_1$. Hva må til for at atom B skal løsrive seg fra molekylet etter støtet?

l) Hvordan må du velge $\vec{v}_0$ og $\vec{r}_0$ for at atom B skal gå i en sirkelbane etter støtet?

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!

Formelark Fys-mek1100 våren 2009

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$, og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha \cdot (\theta - \theta_0)$.

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$.

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Galilei-trans.: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$.

Fjærkraft: $F(x) = -k\,(x - x_0)$. Luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$.

Friksjon: $|F_s| \leq \mu_s N$ eller $|F_d| = \mu_d N$.

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Potensiell energi: $U(\vec{r})$. Tyngdekraft: $U = mgy$. Fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$.
Konservativ kraft: $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$.

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$.

Rakett-likningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$.

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$.

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$.

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$.

Parallellakseteoremet: $I = I_{\text{cm}} + Md^2$.

Rullebetingelse: $V = \omega R$.

Fiktive krefter: $m\vec{a}' = \sum \vec{F}^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$.

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$.

Lorentz-trans.: $x' = \gamma\,(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Relativistisk: $m = \gamma m_0$, $\vec{p} = m\vec{v}$, $E = mc^2$.