UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS-MEK1110
Eksamensdag: Mandag 22. mars 2010
Tid for eksamen: Kl. 1500-1800
Oppgavesettet er på 4 sider + formelark
Tillatte hjelpemidler: Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller
Angell, Lian, Øgrim: Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler
Rottmann: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Ved sensur vil alle deloppgaver bli tillagt like stor vekt med mindre annet er oppgitt i oppgaven. Vi forbeholder oss retten til justeringer.

Du må i oppgavene begrunne dine svar. Ubegrunnede svar gir liten uttelling.

Oppgave 1

Vi skal i denne oppgaven studere bevegelsen til en (fugle-)fjær i en tornado. Vi begynner med å finne ut hvordan vi kan modellere fjæras oppførsel uten vind og utvikler deretter en metode for å finne bevegelsen i et gitt hastighetsfelt.

Først ser vi på bevegelsen til fjæra i et vindstille rom.

a) Identifiser kreftene på fjæra mens den faller og tegn et frilegemediagram for fjæra.

b) Innfør kraftmodeller for kreftene, og finn et uttrykk for akselerasjonen til fjæra. Du kan anta en kvadratisk lov for luftmotstanden.

c) Hastigheten til fjæra vil gå asymptotisk mot terminalhastigheten. Vis at terminalhastigheten er:

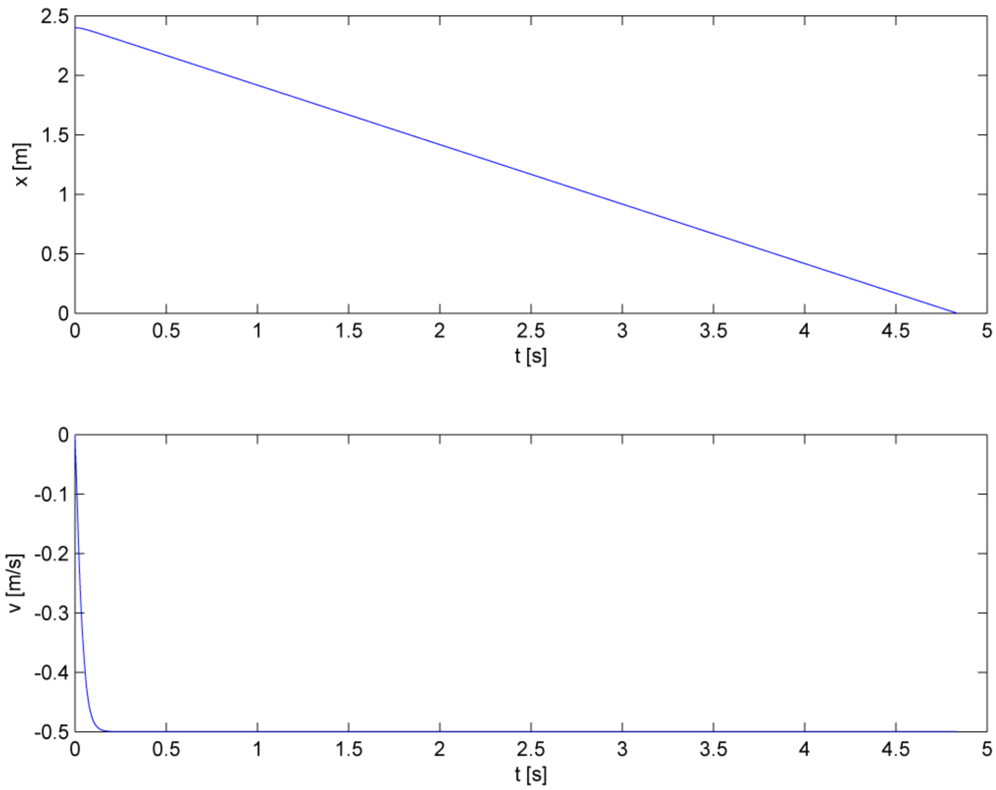
$$v_T = -\sqrt{\frac{mg}{D}}$$

hvor D er konstanten i luftmotstandsmodellen.

d) Vi slipper fjæra fra en høyde h over gulvet og måler hvor lang tid, t, det tar før den treffer gulvet. Du kan anta at fjæra faller med konstant hastighet lik terminalhastigheten. Vis hvordan du kan bestemme D/mg ved å måle tiden t. Finn D/mg når du slipper fjæra fra en høyde på 2.4m over bakken og det tar 4.8s til den treffer bakken.

e) Vi skal nå utvikle en mer presis modell hvor vi ikke antar at hastigheten er konstant. Du slipper fjæra fra høyden h ved tiden $t = 0\,\text{s}$. Finn likningen du må løse for å finne posisjonen til fjæra som funksjon av tiden. Hva er initialbetingelsene?

f) (Denne oppgaven teller dobbelt) Skisser en algoritme for å finne hastigheten og posisjonen til fjæra ved tiden $t + \Delta t$ når du kjenner hastigheten og posisjonen ved tiden t. Skriv et kort program som finner posisjonen og hastigheten til fjæra som funksjon av tiden.



g) Figuren over viser et resultat fra programmet med parametere slik de ble estimert i oppgave d). Var tilnærmingen i oppgave d) rimelig? Begrunn svaret.

Vi har nå funnet en modell som kan brukes til å finne bevegelsen til fjæra. Vi skal nå finne bevegelsen til fjæra i tre dimensjoner når det blåser. Vinden har hastigheten $\vec{w}$ i posisjonen $\vec{r} : \vec{w} = \vec{w}(\vec{r})$.

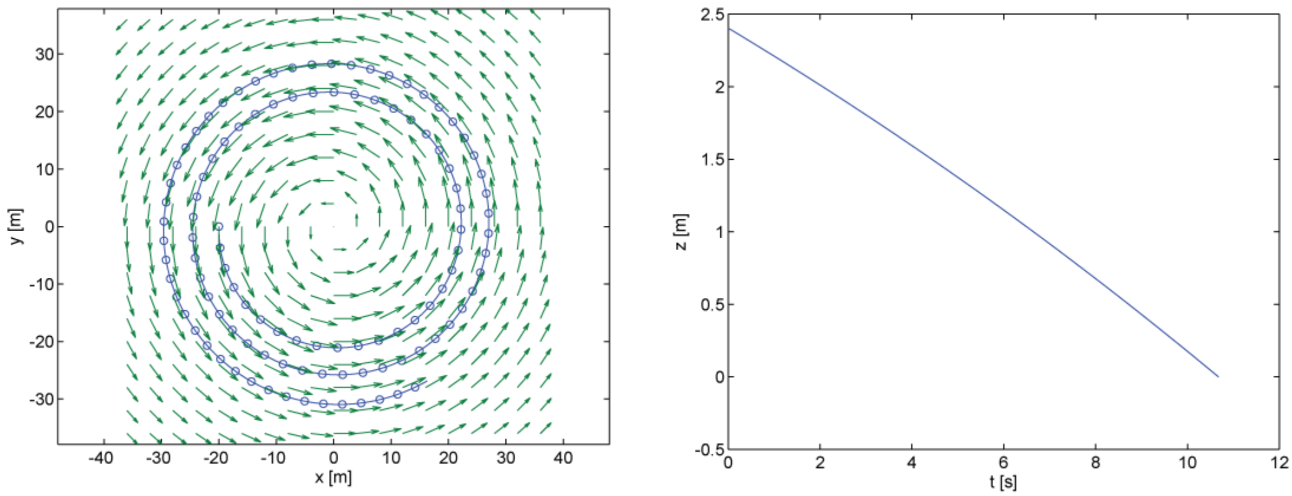
h) Finn et uttrykk for akselerasjonen til fjæra uttrykt ved bl.a. $\vec{w}(\vec{r})$. La z -aksen være den vertikale aksen.

i) Anta at fjæra tilnærmet beveger seg i et horisontalt plan – dvs. at den vertikale akselerasjonen er ubetydelig. Hvordan må vindhastigheten være for at fjæra skal bevege seg med konstant fart v_0 i en sirkelbane med radius r_0?

For en tornado med sentrum i origo er vindhastigheten:

$$\vec{w}(\vec{r}) = u_0 r e^{-r/R} \hat{u}_n = u_0 (-y, x, 0) e^{-r/R}$$

Hvor u_0 er en karakteristisk hastighet for vinden, R er radius for tornadoen, og $\hat{u}_n$ er en tangentiell enhetsvektor i det horisontale planet. ($\hat{u}_n$ er normal til $\vec{r}$). Her er $\vec{r} = (x, y, z)$ og $r = |\vec{r}|$.
Hastighetsfeltet er vist i figuren under.



j) Kan man med et passende valg av initialbetingelser få fjæra til å bevege seg i en sirkelbane i tornadoen? Begrunn svaret ditt.

k) Skriv et program som finner posisjon og hastighet til fjæra som funksjon av tiden. (Det er tilstrekkelig å ta med den delen av programmet som viser hvordan du finner nye hastighets- og posisjonsvektorer fra de foregående verdiene).

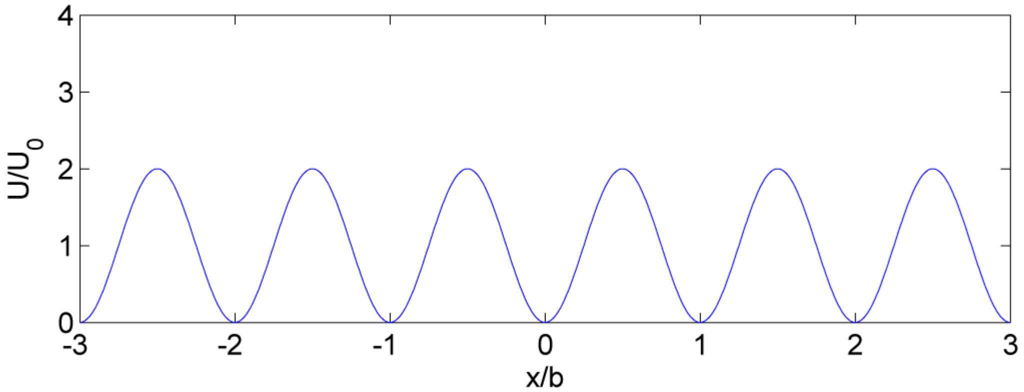
l) Figuren over viser banen til fjæra når den slippes med null hastighet i en høyde av 2.4m. Sammenlikn med resultatet i oppgave h). Hvorfor bruker fjæra nå lengre tid på å nå bakken?

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere bevegelsen til et atom nær en overflate. Vi beskriver bevegelsen til atomet kun i en dimensjon, langs x-aksen. Atomet er kun påvirket av en kraft: kraften fra overflaten på atomet. Den potensielle energien til atomet er da:

$$U(x) = U_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{b} x\right)$$

hvor U_0 er en konstant med enhet energi, og b er en lengde som typisk er rundt en nanometer. Atomets masse er m. Den potensielle energien er vist i figuren under:



a) Finn likevektspunkter for potensialet og karakteriser disse. Tegn inn en bevegelse hvor totalenergien er mindre enn $2U_0$ og en bevegelse hvor totalenergien er større enn $2U_0$, og skisser $x(t)$ for bevegelsene.

b) Finn kraften $F(x)$ på atomet fra overflaten. Er denne kraften konservativ? Begrunn svaret.

c) Finn arbeidet utført av kraften $F(x)$ på atomet når det beveger seg fra $x = 0$ til $x = b/2$.

d) Hvor stor hastighet v_0 må atomet ha i punktet $x = 0$ for at det skal ha null hastighet i punktet $x = b/4$?

La oss anta at atomet også påvirkes av en konstant ytre kraft F_0 i x-retningen.

e) Finn arbeidet utført av kraften F_0 på atomet når det beveger seg fra $x = 0$ til punktet x.

f) Finn et uttrykk for den totale potensielle energien til atomet, $U_{TOT}(x)$.

g) Anta at atomet har total mekanisk energi U_0 før den ytre kraften F_0 skrus på. Hvor stor må F_0 være for at atomet skal bli trukket fri fra overflaten når kraften skrus på? Vi sier at atomet er fri fra overflaten dersom det vil kunne bevege seg uendelig langt bort langs x-aksen.

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!

Formelark Fys-mek1100 våren 2008

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$, og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\cdot(\theta - \theta_0)$.

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$.

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Galilei-trans.: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$.

Fjærkraft: $F(x) = -k\,(x - x_0)$. Luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$.

Friksjon: $|F_s| \leq \mu_s N$ eller $|F_d| = \mu_d N$.

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Potensiell energi: $U(\vec{r})$. Tyngdekraft: $U = mgy$. Fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$.
Konservativ kraft: $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$.

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$.

Rakett-likningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$.

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$.

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$.

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$.

Parallellakseteoremet: $I = I_{\text{cm}} + Md^2$.

Rullebetingelse: $V = \omega R$.

Fiktive krefter: $m\vec{a}' = \sum \vec{F}^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$.

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$.

Lorentz-trans.: $x' = \gamma\,(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Relativistisk: $m = \gamma m_0$, $\vec{p} = m\vec{v}$, $E = mc^2$.