Vektoranalyse (basert på første kapittel i "Skaar - Elektromagnetisme")

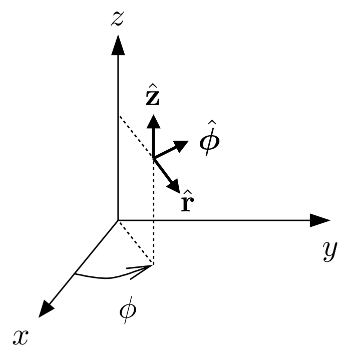
Johannes Skaar

April 28, 2023

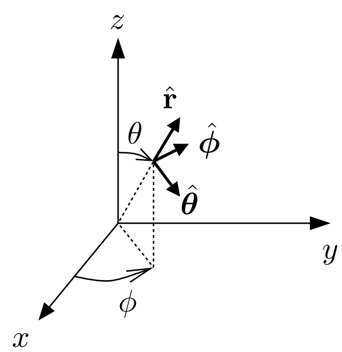
1 Koordinatsystemer

Enhetsvektorene i et kartesisk koordinatsystem peker langs henholdsvis x-, y- og z-aksen. Vi kaller dem $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ og $\hat{\mathbf{z}}$.

Et sylindrisk koordinatsystem angis med koordinatene r, ϕ og z, se figuren nedenfor. Her er r avstanden fra z-aksen. Det er hensiktsmessig å innføre enhetsvektorer også her – disse er definert slik at de har retning den veien den tilsvarende koordinaten øker raskest. F.eks. er enhetsvektoren i z-retning, $\hat{\mathbf{z}}$, i den retningen hvor z øker. Tilsvarende er $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ i den retningen hvor ϕ øker, og $\hat{\mathbf{r}}$ radielt utover. Vi merker oss at $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ og $\hat{\mathbf{r}}$ ikke har samme retning overalt – de er avhengige av hvor vi befinner oss:



Et sfærisk koordinatsystem har koordinatene r, ϕ og θ. Her er r avstanden fra origo, ϕ er lengdegraden, mens θ er vinkelen ned fra nordpolen (jfr. koordinater på jordkloden). Merk at ϕ og θ er ombyttet i noen matematikkbøker. Konvensjonen som er valgt her er standard i så og si all fysikklitteratur. Enhetsvektorene er $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ og $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:



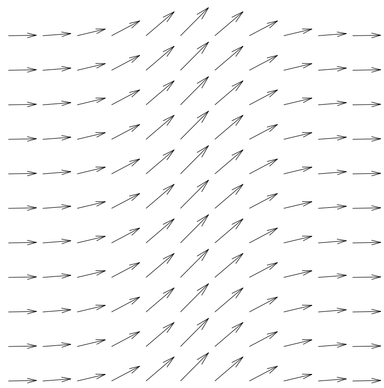
2 Skalare funksjoner $U(x, y, z)$ og vektorfelt $\mathbf{A}(x, y, z)$

Her er noen eksempler på skalare funksjoner fra dagliglivet:

- $T(x, y, z)$: Temperaturen som funksjon av posisjon i rommet.
- $T(x, y, z, t)$: Temperaturen i rommet som funksjon av tiden t.
- $h(x, y)$: høyden over havet på kartet eller i terrenget.
- $U(x, y, z)$: potensialet i rommet.

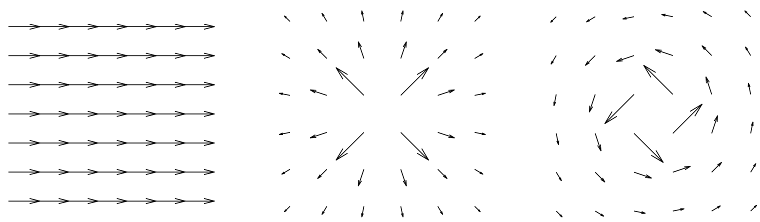
Her er noen eksempler på vektorfelt:

- Strøm som funksjon av posisjon i rommet (f.eks. vannstrøm eller elektrisk strøm):



- $\mathbf{E}(x, y, z)$: Elektrisk felt i rommet.

Vektorfelt kan være konstant, strømme utover og sirkulere:



konstant utstrømning/divergens sirkulasjon/curl

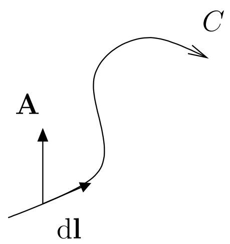
3 Integraler og notasjon

Linjeintegral

Et linjeintegral av en skalar funksjon f over en kurve C skriver vi $\int_C f\mathrm{d}l$. Hvis f er massetettheten til C per lengdeenhet, vil $\int_C f\mathrm{d}l$ være massen til C.

Et linjeintegral av et vektorfelt $\mathbf{A}$ over en kurve C skriver vi $\int_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$. Når kurven er lukket tegner vi en ring rundt integraltegnet: $\oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$. Integralet $\int_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ er det samme som i matematikken ofte skrives $\int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t$, der $\mathbf{r}(t)$ er en parametrisering av kurven, evt. $\int_C A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z$. Vektoren $\mathrm{d}\mathbf{l}$ kalles et linjeelement.

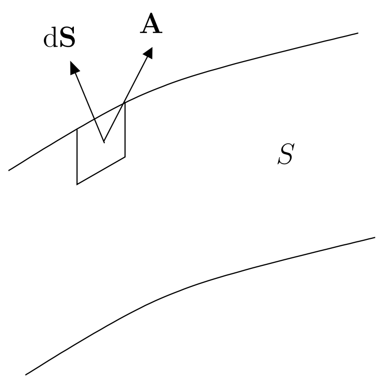
Hvis $\mathbf{A}$ er en kraft på et legeme, og legemet flyttes $\mathrm{d}\mathbf{l}$, er $\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ arbeidet som utføres av kraften $\mathbf{A}$. Da vil altså integralet $\int_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ være det arbeidet som $\mathbf{A}$ utfører når legemet flyttes langs C.

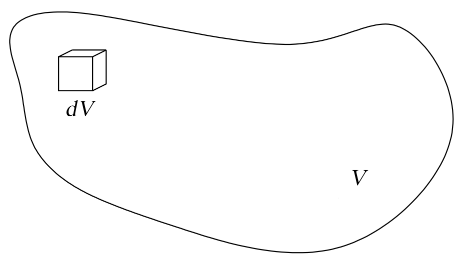


Flateintegral

For enkelhets skyld skriver vi et flateintegral med kun ett integraltegn: $\int_S f\mathrm{d}S$. Hvis f er massetettheten per arealenhet for flaten S, er $\int_S f\mathrm{d}S$ massen til S.

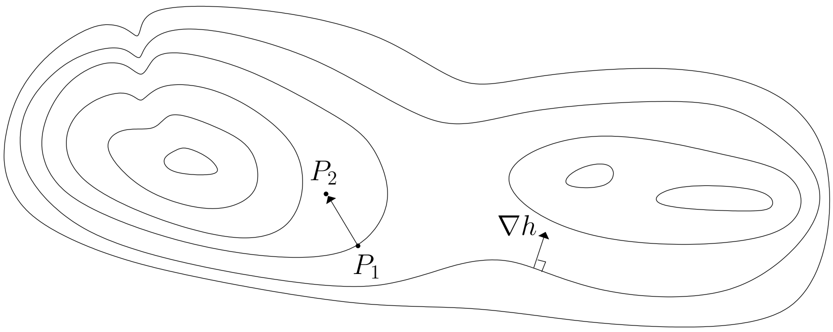
Vi er mest interessert i flateintegraler på formen $\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$. Dette integralet gir strømmen (eller fluksen) av $\mathbf{A}$ gjennom flaten S (mer om dette i kap. 11). I matematikken fins den alternative notasjonen $\int_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S$, der $\hat{\mathbf{n}}$ er en enhets-flatenormalvektor, og $\mathrm{d}S$ er arealet til flateelementet. Dersom flaten S er lukket, får integraltegnet en ring: $\oint$. I dette tilfellet defineres flatenormalen til å peke *ut av* flaten.





Volumintegral

Vi skriver også volumintegraler med ett enkelt integraltegn: $\int_V f\mathrm{d}V$. Her er $\mathrm{d}V$ et volumelement, og vi integrerer funksjonen f over volumet V. Hvis f er massetettheten i volumet V, vil $\int_V f\mathrm{d}V$ være den totale massen.



4 Gradient

Et kart angir høyden $h(x, y)$ vha. høydekurver, se figuren på toppen av siden. Vi beveger oss fra punktet $P_1 = (x, y)$ til $P_2 = (x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$. Da endrer høyden seg med:

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \nabla h \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = |\nabla h||\mathrm{d}\mathbf{l}| \cos\theta, \tag{1}$$

der θ er vinkelen mellom vektorene ∇h og $\mathrm{d}\mathbf{l}$. Gradienten ∇h er altså definert som

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right), \tag{2}$$

og lengdeelementet er $\mathrm{d}\mathbf{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. Vi har brukt notasjonen at $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ er en vektor med x-komponent $\mathrm{d}x$ og y-komponent $\mathrm{d}y$. Dette kan også skrives

$$\mathrm{d}\mathbf{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \mathrm{d}x\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{y}}, \tag{3}$$

der $\hat{\mathbf{x}}$ og $\hat{\mathbf{y}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x- og y-retning.

Retningsfaktoren $\cos\theta$ i (1) viser at høyden endrer seg mest dersom $\mathrm{d}\mathbf{l}$ er i samme retning som gradienten ∇h. Når vi har gått horisontalt 1 meter i denne retningen, har høyden steget med $|\nabla h|$ meter.

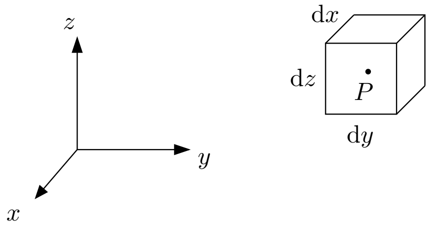
Noen viktige ting å merke seg:

- I 3 dimensjoner definerer vi tilsvarende:

$$\boxed{\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}}.$$

- ∇U er gradienten til en (skalar) funksjon U.
- ∇U er en vektor!
- ∇U står normalt på flatene $U =$ konstant (vis dette!).
- ∇U kan regnes ut i sylinderkoordinater og sfæriske koordinater. Uttrykkene står på formelarket (kap. 12).

Huskeregelen $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ er nyttig både for gradient, divergens, curl og laplace-operator.



Boks med volum $\Delta V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ og overflate S.
$P = (x_0, y_0, z_0)$ er i midten av boksen.

5 Divergens

Hvor mye strømmer et vektorfelt $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ut av punktet $P = (x_0, y_0, z_0)$? Svaret finnes fra div$\mathbf{A}$, divergensen til $\mathbf{A}$. Vi omslutter punktet P med en infinitesimal boks med volum ΔV og overflate S. Divergensen er definert som netto utstrømning (fluks) av $\mathbf{A}$ ut av boksen, dividert på volumet til boksen:

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}{\Delta V}.} \tag{4}$$

For å finne ut hva div$A$ er, dvs. hvor mye $\mathbf{A}$ strømmer utover, lar vi boksen ha infinitesimale sidekanter $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ og $\mathrm{d}z$, se figuren på toppen av siden. Integralet i telleren av (4) er

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathrm{d}S, \tag{5}$$

der $\hat{\mathbf{n}}$ er normalvektoren til flaten S. Vi husker at normalvektoren alltid er definert til å peke ut av en lukket flate, så $\hat{\mathbf{n}}$ peker ut av boksen.

Vi ønsker nå å regne ut høyre side av (5). Vi må da huske på at komponentene A_x, A_y og A_z er avhengige av posisjon (x, y og z), så de kan avhenge av hvor på boksen vi befinner oss. Integralet er en sum av integralene over de 6 sidene til boksen:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = & \int_{\text{foran}} A_x(\text{foran}) \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_{\text{bak}} A_x(\text{bak}) \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ & - \int_{\text{venstre}} A_y(\text{venstre}) \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \int_{\text{høyre}} A_y(\text{høyre}) \mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ & + \int_{\text{topp}} A_z(\text{topp}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\text{bunn}} A_z(\text{bunn}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6}$$

F.eks. er $A_x(\text{foran}) - A_x(\text{bak}) = A_x(x_0 + \mathrm{d}x/2, y_0, z_0) - A_x(x_0 - \mathrm{d}x/2, y_0, z_0) = \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x$, der siste likhet kommer fra definisjonen av den deriverte. Tilsvarende kan man finne ut at $-A_y(\text{venstre}) + A_y(\text{høyre}) = \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}y$ og $A_z(\text{topp}) - A_z(\text{bunn}) = \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z$. Dette betyr at integralet vi er på jakt etter, kan skrives

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{7}$$

Fra definisjonen (4) får vi dermed at divergensen kan uttrykkes

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A}.} \tag{8}$$

Pga. denne sammenhengen skriver vi divergensen til et vektorfelt $\mathbf{A}$ heretter som $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

- En tilsvarende regneøvelse kan gjøres i sylindriske og sfæriske koordinatsystemer, og man får da formlene for $\nabla \cdot \mathbf{A}$ som du finner i kap. 12.
- Merk at $\nabla \cdot \mathbf{A}$ er en skalar (et tall), ikke en vektor!
- Regneregel: $\nabla \cdot (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\nabla \cdot \mathbf{A} + b\nabla \cdot \mathbf{B}$.

For de spesielt interesserte: Egentlig burde vi kalt sidekantene til boksen Δx, Δy og Δz, og krevet at alle disse går mot null. I (6) får man korreksjonsledd fordi f.eks. A_x(foran) avhenger av y og z, men disse vil være proporsjonale med $(\Delta y)^2$ eller $(\Delta z)^2$ og derfor gå mot null etter at man deler på ΔV og tar grensene.

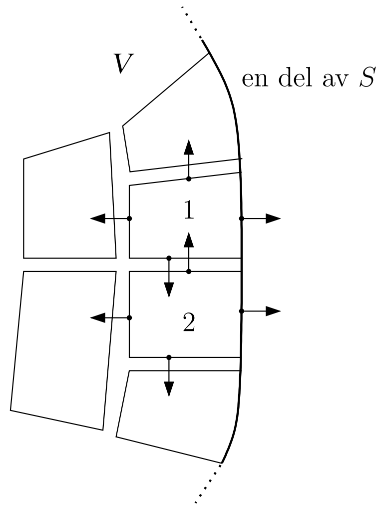
6 Divergensteoremet

Gitt en lukket flate S som omslutter et volum V. Divergensteoremet sier at

$$\boxed{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}V.} \tag{9}$$

Med andre ord kan strømmen (fluksen) av $\mathbf{A}$ ut av flaten S finnes ved å summere opp divergensen av $\mathbf{A}$ i alle punkt innenfor S. Et flateintegral kan dermed uttrykkes som et volumintegral, eller omvendt.

Divergensteoremet er et lite mirakel, men likevel ikke så vanskelig å forstå. Så fort man har forstått hva venstre og høyre side av (9) betyr, kan man bevise teoremet med nærmest bare en skisse. Figuren nedenfor viser tverrsnittet av et volum V som omsluttes av en lukket flate S. Volumet er delt opp i infinitesimale volumelementer. Flatenormalene til elementene 1 og 2 er angitt med piler. Legg merke til at flatenormalen til ett element er motsatt rettet av flatenormalen til naboelementet – flatenormalen peker alltid ut av en lukket flate.



For det infinitesimale volumelementet 1 gir definisjonen av divergens (4) at

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}V = \oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{10}$$

Her er $\mathrm{d}V$ volumet til elementet, og S_1 overflaten som omslutter elementet. Summerer vi over alle volumelementer, får vi

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}V = \sum_i \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{11}$$

der S_i er overflaten som omslutter element i. Se nå på grenseflaten mellom element 1 og 2. Integralet $\int \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ over denne flaten vil være like stort, men med motsatt fortegn, for leddene med $i = 1$ og $i = 2$. Dette er fordi de respektive flatenormalene peker motsatt vei. Dermed kansellerer alle bidrag over de indre grenseflatene. Bare på randen, dvs. på selve S, vil vi få et bidrag. Med andre ord blir høyre side av (11) lik $\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, hvilket gir divergensteoremet.

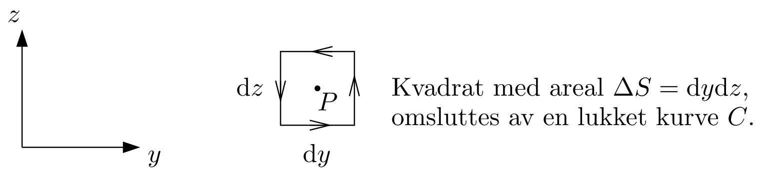
7 Curl (virvling)

Hvor mye (og i hvilken retning) sirkulerer et vektorfelt $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ rundt punktet $P = (x_0, y_0, z_0)$? Svaret finnes fra curl $\mathbf{A}$, som defineres som sirkulasjonen rundt de tre koordinataksene. F.eks. defineres x-komponenten av curl $\mathbf{A}$ som

$$\boxed{(\mathrm{curl}\,\mathbf{A})_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}{\Delta S},} \tag{12}$$

der ΔS er et flateelement som inneholder P, og som er normalt på x-aksen, og C er den lukkede kurven som omslutter dette flateelementet.

Vi kan regne ut høyre side av (12) vha. følgende figur:



Integralet blir

$$\begin{aligned} &\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \qquad\qquad (13) \\ &= \int_{\text{nede}} A_y(\text{nede})\mathrm{d}y - \int_{\text{oppe}} A_y(\text{oppe})\mathrm{d}y - \int_{\text{venstre}} A_z(\text{venstre})\mathrm{d}z + \int_{\text{høyre}} A_z(\text{høyre})\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Vi har at

$$A_y(\text{nede}) - A_y(\text{oppe}) = A_y(x_0, y_0, z_0 - \mathrm{d}z/2) - A_y(x_0, y_0, z_0 + \mathrm{d}z/2) = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

$$A_z(\text{høyre}) - A_z(\text{venstre}) = A_z(x_0, y_0 + \mathrm{d}y/2, z_0) - A_z(x_0, y_0 - \mathrm{d}y/2, z_0) = \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

der vi igjen har brukt definisjonen på de partiellderiverte. Dette gir

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{14}$$

og derfor

$$(\mathrm{curl}\,\mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \tag{15}$$

Vi kan finne de andre komponentene av curl $\mathbf{A}$ på tilsvarende vis. Man finner da curl $\mathbf{A}$ uttrykt som

$$\boxed{\mathrm{curl}\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{A},} \tag{16}$$

altså kryssproduktet av nabla-operatoren og $\mathbf{A}$. Pga. denne relasjonen vil vi heretter bruke notasjonen $\nabla \times \mathbf{A}$ for curl.

- Vi kan også regne ut $\nabla \times \mathbf{A}$ i sylinderkoordinater og sfæriske koordinater. Resultatet finnes i kap. 12.
- Merk at $\nabla \times \mathbf{A}$ er en vektor!

- Regneregel: $\nabla \times (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\nabla \times \mathbf{A} + b\nabla \times \mathbf{B}$.
- Merk at $\nabla \times (\nabla U) = 0$ og $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ for alle U og $\mathbf{A}$. (Sjekkes enkelt ved utregning.)

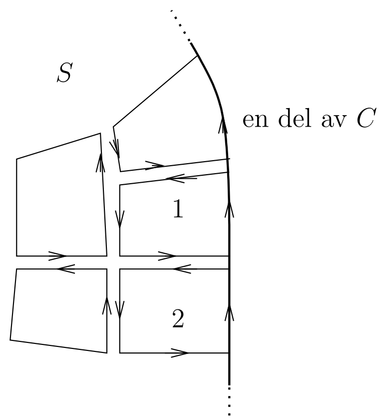
Også her burde vi strengt tatt kalt sidekantene til firkanten Δx og Δy, og krevet at begge går mot null.

8 Stokes' teorem

Stokes' teorem stadfester at sirkulasjonen av $\mathbf{A}$ rundt en lukket kurve C er summen av alle små sirkulasjoner inne i et areal S som kurven omslutter:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.} \tag{17}$$

Vi beviser (17) helt tilsvarende som divergensteoremet. Først deler vi opp arealet S inn i infinitesimale arealelementer dS:



Vha. definisjonen på curl, ser vi at f.eks. for kurve C_1 rundt elementet 1 gjelder

$$\nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}. \tag{18}$$

Her er $|\mathrm{d}\mathbf{S}|$ arealet til elementet 1, og retningen til d$\mathbf{S}$ er normalt på flaten, i henhold til følgende høyrehåndsregel: Legg høyre hånd rundt C_1; da peker tommelen og dermed d$\mathbf{S}$ ut av papirplanet. Summerer vi over alle flateelementer, får vi

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}. \tag{19}$$

Se nå på høyre side av (19). Siden vi integrerer i motsatt retning for kurvene mellom naboelementer, vil bidraget fra alle slike kurver til sammen bli null. Vi får kun bidrag fra integralet langs randen, dvs. C. Dermed blir høyre side lik $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$, og Stokes' teorem følger.

For et konservativt vektorfelt, dvs. et vektorfelt som kan skrives som en gradient $\mathbf{A} = -\nabla U$ for en skalar U, så får vi $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Da gir (17) at $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$ for enhver lukket kurve C. Dette impliserer at integralet $\int_a^b \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ er uavhengig av veien vi måtte velge mellom punktene a og b. (Vis dette! Hint: Se på to forskjellige veier fra a til b. Disse utgjør til sammen en lukket kurve C.)

9 Laplace-operatoren ∇^2

Laplaceoperatoren til en skalar funksjon U er gitt av

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U. \tag{20}$$

Laplaceoperatoren kan uttrykkes i sylinderkoordinater og sfæriske koordinater, se formelsamlingen i kap. 12. Huskeregelen for både gradient, divergens, curl og Laplaceoperatoren er at man bør alltid slå opp i formelsamlingen hvis man bruker sylinder- eller sfæriske koordinater. Tipping eller forsøk på kvalifiserte gjett mislykkes som regel alltid.

Laplaceoperatoren til et vektorfelt er definert som

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \tag{21}$$

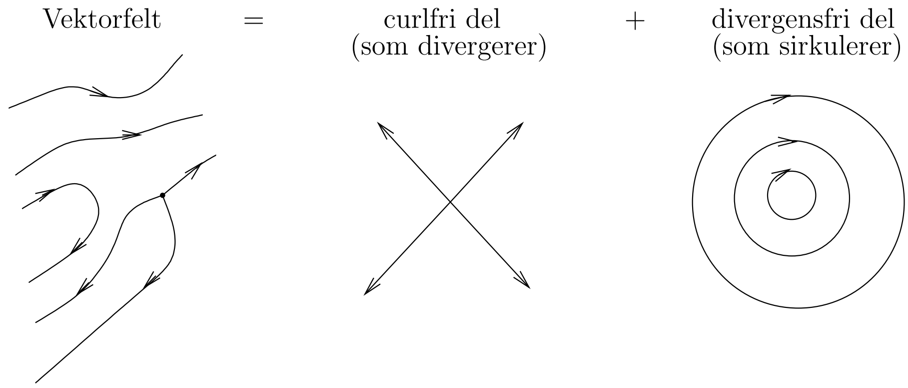
F.eks. er x-komponenten av $\nabla^2 \mathbf{A}$ lik $\nabla^2 A_x$. Merk at $\nabla^2 \mathbf{A}$ og $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ ikke er det samme.

10 Helmholtz' teorem

Litt løselig forteller Helmholtz' teorem oss at et vektorfelt som går mot null i uendeligheten er entydig gitt av dets divergens og curl (bevises ikke her). Et relatert resultat er at et vilkårlig vektorfelt $\mathbf{F}$ kan skrives som en gradient + en curl:

$$\mathbf{F} = \nabla f + \nabla \times \mathbf{A}. \tag{22}$$

Siden curl til en gradient og divergensen til en curl begge er null, kan altså et vilkårlig vektorfelt dekomponeres i en curlfri del og en divergensfri del:



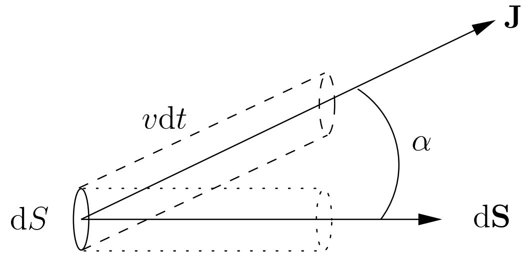
11 Eksempel: Strømtetthet og kontinuitetsligningen

Hvor mye fluid (vann, olje, luft, eller hva det måtte være), strømmer gjennom et areal S per sekund? Svaret vil være avhengig av hvor mye fluid som fins per volumenhet (altså massetettheten ϱ), og også hastigheten $\mathbf{v}$ til fluidet. Vi definerer derfor en *strømtetthet*

$$\boxed{\mathbf{J} = \varrho \mathbf{v}.} \tag{23}$$

Som vi ser, har $\mathbf{J}$ enheten kgm^{-3}ms^{-1} = kgm^{-2}s^{-1}, så det virker rimelig at denne vektoren gir oss hvor mye fluid (kg) som strømmer per tverrsnittsareal m^2 og per sekund s. Det er da naturlig å gjette på at $\mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ gir hvor mange kg som strømmer gjennom flaten $\mathrm{d}S$ per sekund, og dermed at fluksen

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{24}$$



er massen fluid som strømmer gjennom S per sekund. Vi skal nå vise dette.

Vi ser på strømmen av fluid som går igjennom et flateelement $\mathrm{d}S$, se figur. Hastigheten er i retning av $\mathbf{J}$, så i løpet av tiden $\mathrm{d}t$ fyller fluidet opp en skjev sylinder (stiplet) med grunnflate $\mathrm{d}S$ og lengde $v\mathrm{d}t$. Volumet av denne sylinderen finner vi ved å rette den opp (prikket): $\mathrm{d}S(v\mathrm{d}t\cos\alpha)$. Den inneholder derfor massen $\varrho\mathrm{d}S(v\mathrm{d}t\cos\alpha) = J\mathrm{d}S\mathrm{d}t\cos\alpha = \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t$ av fluidet. Dette betyr at $\mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ gir massen fluid som strømmer gjennom flaten $\mathrm{d}S$ per sekund, som skulle vises.

Hvis flaten S er lukket, slik som f.eks. et kuleskall eller overflaten til en boks, vil fluksen av $\mathbf{J}$ ut av S være integralet $\oint_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$. Hvis massen skal være bevart, må denne massestrømmen gå på bekostning av massen m som fins inne i S. Vi har derfor

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \tag{25}$$

Samtidig har vi at

$$m = \int_V \varrho\mathrm{d}V, \tag{26}$$

der V er volumet som omsluttes av S. Dermed kan vi skrive (25)

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\mathrm{d}V = \int_V \left(-\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)\mathrm{d}V. \tag{27}$$

I den siste overgangen har vi antatt at flaten S og dermed volumet V er tidsuavhengige, dvs. de endrer seg ikke eller flytter seg ikke. I tillegg har vi divergensteoremet

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{J}\mathrm{d}V. \tag{28}$$

Ved å kombinere (27) og (28), får vi

$$\int_V \left(\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = 0. \tag{29}$$

Den lukkete flaten S kan velges til å omslutte et vilkårlig lite volum; i grensen bare et eneste volumeelement $\mathrm{d}V$. Da kan vi ta bort integralet $\int_V$, slik at

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0.} \tag{30}$$

Lign. (30) kalles *kontinuitetsligningen.* Den forteller at hvis det strømmer fluid ut fra et punkt, går det på bekostning av massetettheten i det punktet. Den er en lokal form av den globale loven for bevaring av masse (25).

12 Vektorformler

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla U &= \frac{\partial U}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse}) \\
\nabla(U+W) &= \nabla U + \nabla W \\
\nabla(UW) &= U\nabla W + W\nabla U \\
\nabla f(U) &= f'(U)\nabla U \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \\
\nabla\cdot(U\mathbf{A}) &= U\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla U \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(U\mathbf{A}) &= (\nabla U)\times\mathbf{A} + U\nabla\times\mathbf{A} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla U) &= \nabla^2 U \\
\nabla\times(\nabla U) &= 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\int_V \nabla U \mathrm{d}V = \oint_S U \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$

$$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}V = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$

$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\
&\quad + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \\
&\quad + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \\
&\quad + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) \\
&\quad + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 U &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$