Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett Eksamen vår 2023

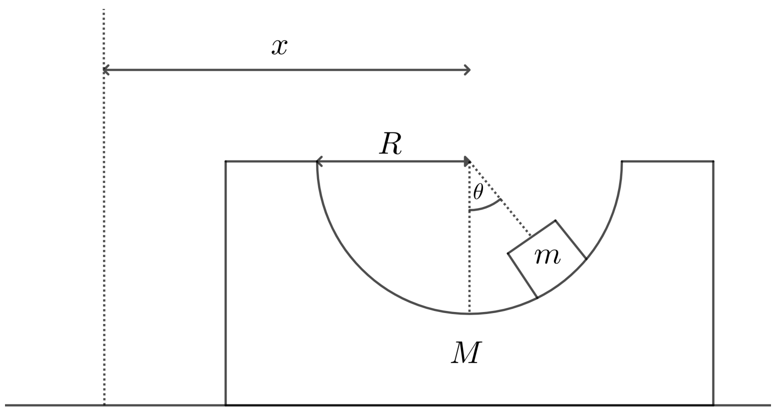
Oppgave 1 Tekstsvaroppgaver

a) To baller ruller bortover bakken og kommer til et skråplan oppover. Begge ballene har samme fart i det de kommer til skråplanet. Ballene har samme masse og samme radius, men den ene ballen er hul inni mens den andre har uniform massetetthet. Hvilken ball kommer lengst opp på skråplanet? Eller kommer de like langt opp? Grunngi svaret. Ingen av ballene sklir, og du kan se bort fra luftmotstand.

b) Hvis du vet initialbetingelsene til en dobbeltpendel (posisjoner og hastigheter ved tid $t = 0$), diskuter hvorvidt du kan forutsi hvordan bevegelsen blir. (Omfang ca. 5-10 setninger.)

Oppgave 2 Kloss i bevegelig halvsirkel

En liten kloss med masse M beveger seg på innsiden av en halvsirkel med radius R. Halvsirkelen er en del av en større struktur med masse M; denne kan skli frem og tilbake i det horisontale planet. Vi beskriver den horisontale posisjonen til sentrum av halvsirkelen med koordinaten x, og posisjonen til klossen inne i halvsirkelen ved hjelp av vinkelen θ (se figur). Vi ser bort fra friksjon.



Figur 1: Skisse av systemet i oppgave 2, og koordinatene vi bruker for å beskrive systemet.

a) Vis at Lagrangefunksjonen til systemet er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgR\cos\theta.$$

> **Hint:** Det er neppe lurt (sannsynligvis bare forvirrende) å regne "baklengs" fra det oppgitte uttrykket for $\mathcal{L}$. Uttrykket står der kun for at du skal kunne kontrollere svaret ditt og bruke det videre i oppgaven.

b) Finn Lagrange-likningen for koordinaten x.

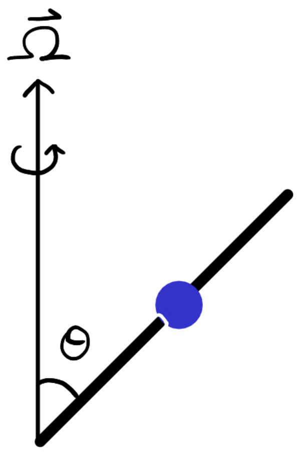
c) Hvis man også finner Lagrange-likningen for θ, og kombinerer de to, vil man finne følgende bevegelseslikning for θ (du skal *ikke* vise denne):

$$\left(1-\frac{m}{M+m}\cos^2\theta\right)\ddot{\theta}+\frac{m}{M+m}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2+\frac{g}{R}\sin\theta=0.$$

Vi antar at klossen beveger seg nærme bunnen i halvsirkelen, altså $\theta \ll 1$. Vis at for tilstrekkelig liten vinkel θ beskriver bevegelseslikningen en harmonisk oscillator, og finn vinkelfrekvensen til svingningene.

d) Bruk minst to metoder til å vurdere om bevegelseslikningen som er oppgitt i c) er rimelig. (Det du har gjort i deloppgave c) teller ikke blant de to.)

Oppgave 3 Perle på roterende stav



Figur 2: Perle på stav.

En perle med hull i midten er montert på en tynn stav, som danner vinkelen θ med vertikalen. Perlen glir friksjonsfritt langs staven. Staven roterer med vinkelhastighet Ω rundt vertikalen. Perlen har masse m. I hele oppgaven ser vi bort fra gravitasjon.

a) Velg en passende generalisert koordinat, og sett opp Lagrangefunksjonen til perlen.

b) Bruk resultatet i forrige deloppgave til å finne akselerasjonen til perlen i retningen langs staven.

c) Vi ser nå det hele fra referansesystemet til staven. Finn de fiktive kreftene som virker på perlen (størrelse og retning). Finn akselerasjonen langs staven.

Oppgave 4 Reduksjon av tolegemeproblem

a) Vi har et system av N partikler. Anta at summen av eksterne krefter på systemet er $\mathbf{F}^{\text{ext}}$. I tillegg virker det krefter mellom partiklene. Vis at

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}},$$

der $\mathbf{P}$ er totalt driv (= bevegelsesmengde) for partiklene.

b) Bruk resultatet i forrige deloppgave til å argumentere for at et tolegemeproblem med koordinater $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ kan reduseres til et ettlegemeproblem.

Oppgave 5 Arkimedes' prinsipp

a) Finn trykket $p = p(z)$ nede i havet. La z-aksen peke rett oppover, og $z = 0$ svare til havoverflaten.

b) Vis Arkimedes' prinsipp, som sier at et legeme som er nedsenket i en væske får en oppdrift lik tyngden av den væskemengden som legemet fortrenger. Anta at legemet er fullstendig nedsenket i væsken. Oppdrift vil si kraft oppover fra væsken.

Oppgave 6 Flervalgsoppgaver

Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål.

a) Hvilke(n) av disse fiktive kreftene er null når vi beveger oss nordover (langs bakken) ved ekvator?

1. Corioliskraften
2. Sentrifugalkraften
3. Begge
4. Ingen av dem

b) Ranger følgende stoffer etter økende viskositet: honning, luft, melk.

1. luft, melk, honning
2. luft, honning, melk
3. melk, honning, luft
4. melk, luft, honning
5. honning, melk, luft
6. honning, luft, melk

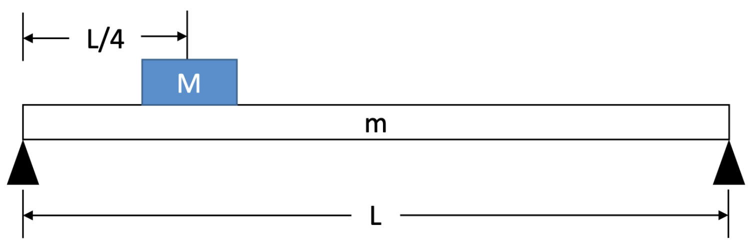
c) Hva er tolkningen til $\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$, og hva er forutsetningen? Her er ϱ massetettheten, og $\mathbf{v}$ hastigheten.

1. Tolkning: Bevegelsesligningen (Newtons 2. lov) for et fluid. Forutsetning: Ikke-viskøst fluid.
2. Tolkning: Bevegelsesligningen (Newtons 2. lov) for et fluid. Forutsetning: Ikke-viskøst og inkompressibelt fluid.
3. Tolkning: En strøm av masse ut av et volumelement går på bekostning av massen til volumelementet. Forutsetning: At massen er bevart.
4. Tolkning: En strøm av masse ut av et volumelement går på bekostning av massen til volumelementet. Forutsetning: Ikke-viskøst fluid.
5. Tolkning: Kontinuitetsligningen. Forutsetning: Inkompressibel væske.

d) Hva er riktig om Hamiltonmekanikk?

1. De frie variablene er generaliserte koordinater q_i og driv p_i.
2. De frie variablene er generaliserte koordinater q_i, hastigheter $\dot{q}_i$ og driv p_i.
3. De frie variablene er generaliserte koordinater q_i og hastigheter $\dot{q}_i$.
4. De frie variablene er de generaliserte koordinatene q_i; man trenger ikke hastigheter eller driv i tillegg.

e) En bjelke med lengde L og masse m hviler med endene på to vekter. En fjerdedel vekk fra bjelkens venstre ende hviler en blokk med masse M på bjelken. Se oppsettet i figur 3. Hva viser vektene?



Figur 3: En masse hviler på en bjelke.

1. Begge viser $(m + M)/2$.
2. Den venstre vekten viser $3(m + M)/4$, den høyre $(m + M)/4$.
3. Den venstre vekten viser $(m + M)/4$, den høyre $3(m + M)/4$.
4. Den venstre vekten viser $(2m + 3M)/4$, den høyre $(2m + M)/4$.
5. Ingen av alternativene er rett.