Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett Eksamen vår 2023

Oppgave 1 Tekstsvaroppgaver

a) To baller ruller bortover bakken og kommer til et skråplan oppover. Begge ballene har samme fart i det de kommer til skråplanet. Ballene har samme masse og samme radius, men den ene ballen er hul inni mens den andre har uniform massetetthet. Hvilken ball kommer lengst opp på skråplanet? Eller kommer de like langt opp? Grunngi svaret. Ingen av ballene sklir, og du kan se bort fra luftmotstand.

Løsning: Ballen som er hul inni har større treghetsmoment, siden massen her er konsentrert i nærheten av overflaten. Dermed har den større kinetisk energi idet den kommer til skråplanet, siden den kinetiske energien er summen av translatorisk kinetisk energi og rotasjons-kinetisk energi. Ballen kommer opp til en høyde der den kinetiske energien har gått helt over til potensiell energi. Dvs. den hule ballen kommer lengst opp.

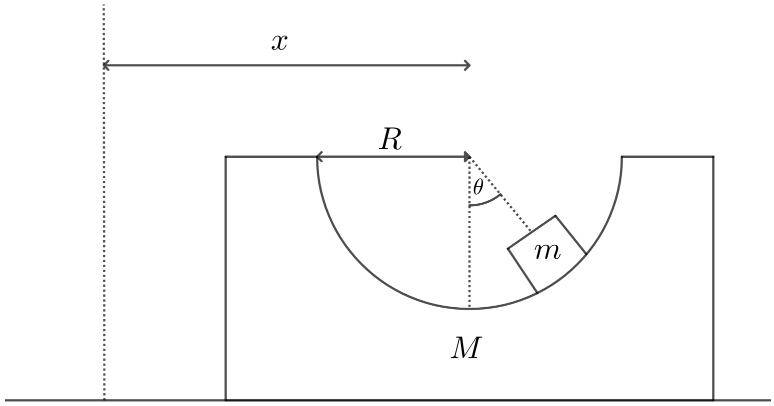
b) Hvis du vet initialbetingelsene til en dobbeltpendel (posisjoner og hastigheter ved tid $t = 0$), diskuter hvorvidt du kan forutsi hvordan bevegelsen blir. (Omfang ca. 5-10 setninger.)

Løsning: For små utslag er det mulig å finne en tilnærmet løsning analytisk. Dvs. med initialbetingelser som gir små utslag, kan man forutsi oppførselen for all framtid.

Men for store utslag er en dobbeltpendel et kaotisk system. I prinsippet kan man forutsi bevegelsen for all framtid ved å løse bevegelsesligningene med initialbetingelser. I praksis kan man også finne starten av bevegelsen på denne måten. For økende t vil imidlertid følsomheten for initialbetingelser øke ekstremt raskt. Derfor vil små perturbasjoner av initialbetingelser (eller numerisk utregning) få dramatiske konsekvenser. Man kan derfor ikke stole på løsningen etter en viss (ikke veldig lang) tid. Dette er kjent som sommerfugl-effekten – det at en sommerfugl slår med vingene kan få dramatisk betydning for været etter en tid.

Oppgave 2 Kloss i bevegelig halvsirkel

En liten kloss med masse M beveger seg på innsiden av en halvsirkel med radius R. Halvsirkelen er en del av en større struktur med masse M; denne kan skli frem og tilbake i det horisontale planet. Vi beskriver den horisontale posisjonen til sentrum av halvsirkelen med koordinaten x, og posisjonen til klossen inne i halvsirkelen ved hjelp av vinkelen θ (se figur). Vi ser bort fra friksjon.



Figur 1: Skisse av systemet i oppgave 2, og koordinatene vi bruker for å beskrive systemet.

a) Vis at Lagrangefunksjonen til systemet er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgR\cos\theta.$$

Hint: Det er neppe lurt (sannsynligvis bare forvirrende) å regne "baklengs" fra det oppgitte uttrykket for $\mathcal{L}$. Uttrykket står der kun for at du skal kunne kontrollere svaret ditt og bruke det videre i oppgaven.

Løsning: Halvsirkelen har kun kinetisk energi, gitt ved $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$. Den potensielle energien til systemet avhenger derfor bare av den vertikale posisjonen til klossen; om vi definerer nullpunktet for potensiell energi ved toppen på halvsirkelen ($\theta = \pm\pi/2$) er den, ved en vilkårlig vinkel θ, gitt ved

$$U = -mgR\cos\theta.$$

For å finne den kinetiske energien til klossen dekomponerer vi posisjonsvektoren dens: Den kan skrives som summen av posisjonen til (senteret av) halvsirkelen, $(x,0)$, og den relative posisjonen til klossen i forhold til dette punktet, $(R\sin\theta, -R\cos\theta)$: $\mathbf{r} = (x + R\sin\theta, -R\cos\theta)$. Hastigheten til klossen i xy-planet er da gitt ved

$$\mathbf{v} = \left(\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\theta, R\dot{\theta}\sin\theta\right).$$

Den totale kinetiske energien til systemet blir da

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(R\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Fra dette kan vi finne Lagrangefunksjonen:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgR\cos\theta.$$

b) Finn Lagrange-likningen for koordinaten x.

Løsning: Siden Lagrangefunksjonen ikke avhenger av x er Lagrange-likningen for x gitt ved

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\Big((M+m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta\Big) \\ &= (M+m)\ddot{x} + mR\ddot{\theta}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Dette kan vi bruke for å skrive $\ddot{x}$ som en funksjon av $\dot{\theta}$ og $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{x} = \frac{mR}{M+m}\Big(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\Big).$$

Likningen for θ var det ikke bedt om, men vi viser den likevel her: Vi har

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mR\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgR\sin\theta,$$

og

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt}\Big(mR^2\dot{\theta} + mR\dot{x}\cos\theta\Big) \\ &= mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{x}\cos\theta - mR\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Disse to uttrykkene setter vi lik hverandre, og erstatter $\ddot{x}$ med uttrykket vi fant over, og finner bevegelseslikningen for θ:

$$\left(1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} + \frac{m}{M+m}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.$$

c) Hvis man også finner Lagrange-likningen for θ, og kombinerer de to, vil man finne følgende bevegelseslikning for θ (du skal *ikke* vise denne):

$$\left(1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} + \frac{m}{M+m}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.$$

Vi antar at klossen beveger seg nærme bunnen i halvsirkelen, altså $\theta \ll 1$. Vis at for tilstrekkelig liten vinkel θ beskriver bevegelseslikningen en harmonisk oscillator, og finn vinkelfrekvensen til svingningene.

Løsning: For små θ har vi $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$, når vi ser bort fra ledd som har høyere orden enn 1 i θ. Dette kan vi sette inn i bevegelseslikningen fra forrige oppgave, og når vi ignorerer ledd har høyere orden enn 1 i θ (og dens deriverte) får vi

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left(1 - \frac{m}{M+m}\right)}_{=\frac{M}{M+m}}\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \end{aligned}$$

som er likningen for en harmonisk oscillator med vinkelfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{g(M+m)}{MR}}.$$

d) Bruk minst to metoder til å vurdere om bevegelseslikningen som er oppgitt i c) er rimelig. (Det du har gjort i deloppgave c) teller ikke blant de to.)

Løsning: Vi kan la $M \to \infty$. Da forventer vi at klossen ikke klarer å dytte på halvsirkelen, så den står fast. Dermed må vi få en ren pendel. Det får vi også: $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$.

Vi kan kontrollere at alle leddene i likningen har samme dimensjon. I dette tilfellet har alle leddene dimensjon s^{-2}, så likningen består dimensjonsanalysen. (Her er prikkene ulver i fåreklær: Husk at $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}$ så en prikk gir s^{-1}.

Hvis vi lar $M \to 0$, vil halvsirkelen kunne flyttes uendelig lett fram og tilbake. Vi forventer da at klossen faller fritt rett nedover. Når vi lar $M \to 0$ i bevegelsesligningen får vi

$$(\sin\theta)\ddot{\theta} + (\cos\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R} = 0. \tag{1}$$

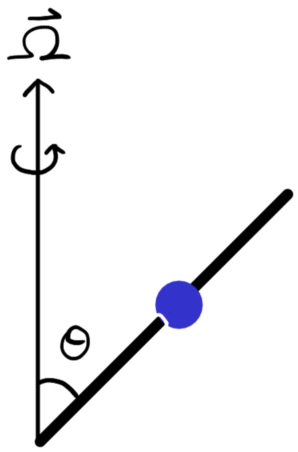
Fritt fall for klossen innebærer $\ddot{z} = g$ (med z-aksen nedover), dvs.

$$g = \frac{d^2}{dt^2} R\cos\theta = -\frac{d}{dt} R\sin\theta\dot{\theta} = -R(\sin\theta)\ddot{\theta} - R(\cos\theta)\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Vi ser at de to bevegelsesligningene (1) og (2) er like.

Hvis vi definerer $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/M$, vil Lagrange' ligninger for $\tilde{\mathcal{L}}$ gi akkurat samme bevegelsesligninger som når vi tar utgangpunkt i $\mathcal{L}$. Vi ser at $\tilde{\mathcal{L}}$ bare avhenger av massene gjennom forholdet m/M. Da må også bevegelsesligningen gjøre det, og det ser vi stemmer (ved å bruke at $\frac{m}{M+m} = \frac{m/M}{1+m/M}$).

Oppgave 3 Perle på roterende stav



Figur 2: Perle på stav.

En perle med hull i midten er montert på en tynn stav, som danner vinkelen θ med vertikalen. Perlen glir friksjonsfritt langs staven. Staven roterer med vinkelhastighet Ω rundt vertikalen. Perlen har masse m. I hele oppgaven ser vi bort fra gravitasjon.

a) Velg en passende generalisert koordinat, og sett opp Lagrangefunksjonen til perlen.

Løsning: Det er naturlig å velge en generalisert koordinat r som er avstanden fra origo, dvs. der staven møter rotasjonsaksen. Hastigheten $\mathbf{v}$ kan dekomponeres i en komponent langs staven (som er $\dot{r}$) og en normalt på staven (som er $\Omega\rho$, der $\rho = r\sin\theta$ er avstanden fra perlen til rotasjonsaksen). Vi får da at $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + (\Omega r \sin\theta)^2$.

Siden vi ser bort fra gravitasjon, er Lagrangefunksjonen gitt av

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m\big[\dot{r}^2 + (\Omega r\sin\theta)^2\big]. \tag{3}$$

b) Bruk resultatet i forrige deloppgave til å finne akselerasjonen til perlen i retningen langs staven.

Løsning: Lagrange' ligning gir $m\ddot{r} = m(\Omega\sin\theta)^2 r$, dvs. akselerasjonen $\ddot{r} = (\Omega\sin\theta)^2 r$.

c) Vi ser nå det hele fra referansesystemet til staven. Finn de fiktive kreftene som virker på perlen (størrelse og retning). Finn akselerasjonen langs staven.

Løsning: Fra formelsamlingen har vi at de fiktive kreftene er $\mathbf{F}_{\text{cor}} + \mathbf{F}_{\text{cf}}$, der $\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}$ og $\mathbf{F}_{\text{cf}} = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}$. Corioliskraften blir $F_{\text{cor}} = 2m\dot{r}\Omega\sin\theta$ med retning ut av papiret i øyeblikket på figuren, dvs. normalt på staven. Sentrifugalkraften blir $F_{\text{cf}} = m\Omega^2 r\sin\theta$ med retning $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, dvs. rett utover fra rotasjonsaksen (ikke fra origo).

Akselerasjonen langs staven finner vi ved å finne komponenten av de fiktive kreftene i stavens retning. Corioliskraften er normalt på staven og bidrar ikke, mens sentrifugalkraften bidrar med $F_{\text{cf}}\sin\theta = m\Omega^2 r\sin^2\theta$. Akselerasjonen blir derfor $\Omega^2 r\sin^2\theta$, som er det samme som vi fant før.

Oppgave 4 Reduksjon av tolegemeproblem

a) Vi har et system av N partikler. Anta at summen av eksterne krefter på systemet er $\mathbf{F}^{\text{ext}}$. I tillegg virker det krefter mellom partiklene. Vis at

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}},$$

der $\mathbf{P}$ er totalt driv (= bevegelsesmengde) for partiklene.

Løsning:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_\alpha = \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \equiv \mathbf{F}^{\text{ext}}. \tag{4}$$

I andre overgang brukte vi Newtons 2. lov og skrev $\dot{\mathbf{p}}_\alpha$ som summen av kreftene på partikkel α, der $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ er kraften på partikkel α fra partikkel β, og $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ er den eksterne kraften på partikkel α. I tredje overgang brukte vi Newtons 3. lov: $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$.

b) Bruk resultatet i forrige deloppgave til å argumentere for at et tolegemeproblem med koordinater $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ kan reduseres til et ettlegemeproblem.

Løsning: Et tolegemeproblem er et system av to legemer der det ikke virker eksterne krefter. Altså er $\dot{\mathbf{P}} = 0$. Samtidig har vi at

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha = M\dot{\mathbf{R}}, \tag{5}$$

der $\mathbf{R}$ er massesenteret gitt av $M\mathbf{R} = \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha$. Så $\dot{\mathbf{P}} = 0$ betyr at $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Med andre ord har massesenteret konstant hastighet. Vi kan da velge et inertielt referansesystem som følger bevegelsen til massesenteret, og som har massesenteret i origo: $\mathbf{R} = 0$. Det holder da å beskrive systemet med den relative posisjonen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, siden vi kan uttrykke $\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{M}\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}$. (Evt. kan vi bruke $\mathbf{r}_1$ som koordinat og uttrykke $\mathbf{r}_2 = -m_1\mathbf{r}_1/m_2$.)

Oppgave 5 Arkimedes' prinsipp

a) Finn trykket $p = p(z)$ nede i havet. La z-aksen peke rett oppover, og $z = 0$ svare til havoverflaten.

Løsning: Bernouillis teorem gir

$$p_0 = p(z) + \varrho g z, \tag{6}$$

der vi har sammenlignet et punkt rett under vannoverflaten og et punkt z nede i vannet. Vi har også antatt at vannet er i ro. Dette gir

$$p(z) = p_0 - \varrho g z, \tag{7}$$

der p_0 er trykket ved overflaten ($z = 0$).

b) Vis Arkimedes' prinsipp, som sier at et legeme som er nedsenket i en væske får en oppdrift lik tyngden av den væskemengden som legemet fortrenger. Anta at legemet er fullstendig nedsenket i væsken. Oppdrift vil si kraft oppover fra væsken.

Løsning: Her er det to mulige løsningsmetoder: 1) Finn oppdriften ved å finne total kraft på overflaten til legemet fra trykket. Bruk en av integralidentitetene på side 4 i formelsamlingen. 2) Se på et kubisk volumelement av legemet, og finn oppdriften til volumelementet. Deretter argumenter for hva oppdriften blir for hele legemet.

1) Kraften fra væsken på et arealelement $d\mathbf{A}$ av legemet er $-pd\mathbf{A}$, der p er trykket. Vi kaller overflaten til legemet S. Dette gir for den totale kraften

$$\mathbf{F} = -\oint_S pd\mathbf{A}. \tag{8}$$

Trykket i væsken er $p = p(z) = p_0 - \varrho g z$.

Trykket ved S er det samme enten legemet er der eller ikke. Hvis legemet ikke hadde vært der, kunne vi skrevet

$$-\oint_S pd\mathbf{A}. = -\int_V \nabla p dV = \int_V \varrho g \hat{\mathbf{z}} dV, \tag{9}$$

der V er volumet som omsluttes av S, og vi har brukt den første integralidentiteten i formelsamlingen. Dette gir at kraften kan skrives

$$\mathbf{F} = mg\hat{\mathbf{z}}, \tag{10}$$

der

$$m = \int_V \varrho dV \tag{11}$$

er massen av væsken i et volum som tilsvarer legemet.

Vi brukte her en litt ukjent integralidentitet. Denne kan evt. vises fra divergensteoremet ved å regne ut komponenten av $\mathbf{F}$ i en vilkårlig retning $\hat{\mathbf{w}}$:

$$\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{F} = -\oint_S (p\hat{\mathbf{w}}) \cdot d\mathbf{A} = -\int_V \nabla \cdot (p\hat{\mathbf{w}}) dV = \hat{\mathbf{w}} \cdot \left(-\int_V \nabla p dV \right). \tag{12}$$

Siden $\hat{\mathbf{w}}$ er en vilkårlig (konstant) enhetsvektor, får vi (9).

2) La kuben ha side a slik at volumet er $V = a^3$. Kraften på den nedre flaten er $p(z)a^2$, og på den øvre $-p(z+a)a^2$, med positiv retning oppover. Altså blir oppdriften $[p(z)-p(z-a)]a^2 = -p'(z)a^3 = \varrho g V = mg$, siden a er liten. Her er ϱ tettheten av vannet. Oppdriften er altså lik tyngden mg av det vannet som volumelementet fortrenger. For et vilkårlig legeme kan vi summere dette over mange volumelementer, og huske på at kreftene på interne flater mellom volumelementer nuller hverandre ut.

Oppgave 6 Flervalgsoppgaver

Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål.

a) Hvilke(n) av disse fiktive kreftene er null når vi beveger oss nordover (langs bakken) ved ekvator?

1. Corioliskraften
2. Sentrifugalkraften
3. Begge
4. Ingen av dem

b) Ranger følgende stoffer etter økende viskositet: honning, luft, melk.

1. luft, melk, honning
2. luft, honning, melk
3. melk, honning, luft
4. melk, luft, honning
5. honning, melk, luft
6. honning, luft, melk

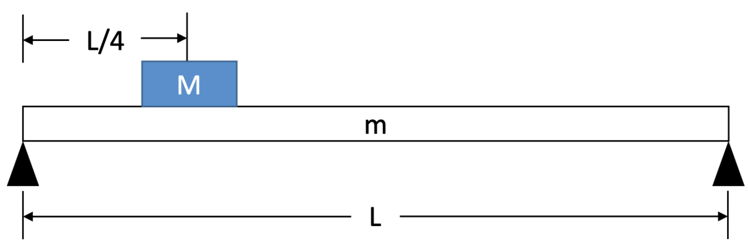
c) Hva er tolkningen til $\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$, og hva er forutsetningen? Her er ϱ massetettheten, og $\mathbf{v}$ hastigheten.

1. Tolkning: Bevegelsesligningen (Newtons 2. lov) for et fluid. Forutsetning: Ikke-viskøst fluid.
2. Tolkning: Bevegelsesligningen (Newtons 2. lov) for et fluid. Forutsetning: Ikke-viskøst og inkompressibelt fluid.
3. Tolkning: En strøm av masse ut av et volumelement går på bekostning av massen til volumelementet. Forutsetning: At massen er bevart.
4. Tolkning: En strøm av masse ut av et volumelement går på bekostning av massen til volumelementet. Forutsetning: Ikke-viskøst fluid.
5. Tolkning: Kontinuitetsligningen. Forutsetning: Inkompressibel væske.

d) Hva er riktig om Hamiltonmekanikk?

1. De frie variablene er generaliserte koordinater q_i og driv p_i.
2. De frie variablene er generaliserte koordinater q_i, hastigheter $\dot{q}_i$ og driv p_i.
3. De frie variablene er generaliserte koordinater q_i og hastigheter $\dot{q}_i$.
4. De frie variablene er de generaliserte koordinatene q_i; man trenger ikke hastigheter eller driv i tillegg.

e) En bjelke med lengde L og masse m hviler med endene på to vekter. En fjerdedel vekk fra bjelkens venstre ende hviler en blokk med masse M på bjelken. Se oppsettet i figur 3. Hva viser vektene?



Figur 3: En masse hviler på en bjelke.

1. Begge viser $(m + M)/2$.
2. Den venstre vekten viser $3(m + M)/4$, den høyre $(m + M)/4$.
3. Den venstre vekten viser $(m + M)/4$, den høyre $3(m + M)/4$.
4. Den venstre vekten viser $(2m + 3M)/4$, den høyre $(2m + M)/4$.
5. Ingen av alternativene er rett.

Løsning: a) 1; b) 1; c) 3; d) 1; e) 4.