Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett Eksamen vår 2024

Oppgave 1 Tekstsvaroppgaver

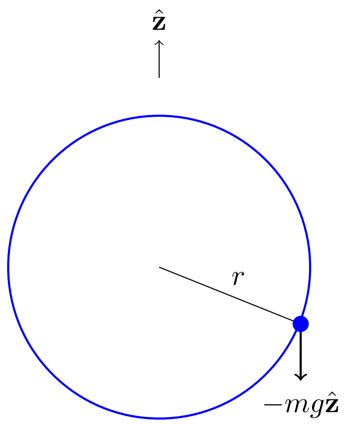
a) Beskriv med noen få setninger et eksperiment for å måle Youngs modul til en ståltråd med tverrsnittsareal A. Hva er enheten til Youngs modul?

b) Nevn og beskriv med noen få setninger hvordan du kan se eller merke Coriolis-krafta i dagliglivet.

c) Vi ser på et fluid der hastigheten er $\mathbf{v}$ som funksjon av rom og tid. Forklar hvorfor den partiellderiverte som funksjon av tid, $\partial \mathbf{v}/\partial t$, *ikke* er akselerasjonen som trengs i Newtons 2. lov når man skal utlede bevegelsesligningen.

Oppgave 2 Partikkel på kule

En partikkel med masse m beveger seg langs en kuleoverflate med radius r. Det er ingen friksjon, men en føring som holder partikkelen til kuleoverflata. Det er en konstant tyngdekraft $-mg\hat{\mathbf{z}}$ overalt, dvs. nedover langs z-aksen.



a) Vis at Lagrangefunksjonen er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) - mgr\cos\theta, \tag{1}$$

for passende koordinater ϕ og θ. Tegn opp systemet der du angir disse koordinatene.

b) Vis at bevegelsesligningene for partikkelen er

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{konst.} \tag{2a}$$

$$r\ddot{\theta} = g\sin\theta + r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta. \tag{2b}$$

c) Bruk spinn til å vurdere om bevegelsesligningene (2) er rimelige.

Tips til resten av oppgaven:
Det holder å se på bevegelser der $\phi = 0$ hele tiden.

d) Er posisjonen på toppen av kula stabil? Dvs. hvis partikkelen forskyves bittelitt derfra, vil den bevege seg tilbake til toppen? Grunngi svaret ut fra bevegelsesligningene.

e) Vis at det fins et sted på kula der partikkelen kan oscillere med små utslag. Hvor er det, og hva blir frekvensen?

Oppgave 3 Diverse

a) Skisser en typisk ellipsebane for en satelitt som går i bane rundt jorda. Få med jorda i skissen. Hvor i banen har satelitten størst hastighet?

b) En person sitter i en karusell. Tegn de horisontale kreftene som virker på personen dersom (i) du ser situasjonen fra bakke-systemet/labsystemet, og dersom (ii) du ser situasjonen fra karusell/det akselererte systemet. I karusellsystemet, har personen en akselerasjon?

c) La ϱ være massetettheten, og $\mathbf{v}$ være hastigheten til et fluid/medium, som funksjon av rom og tid. Vi definerer videre $\mathbf{J} = \varrho\mathbf{v}$.

Bruk kontinuitetsligningen $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ til vise følgende ligning for massen m i et volum V:

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \tag{3}$$

der S er en lukket flate som omslutter V, som vi antar fast (ikke avhengig av tiden).

Hva er tolkningen til ligning (3)?

d) Vi ser på et system med kun én generalisert koordinat q. Generalisert driv defineres ved $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$, der $\mathcal{L}$ er Lagrangefunksjonen. Hamiltonfunksjonen defineres ved $\mathcal{H}(p,q) = p\dot{q} - \mathcal{L}$. Nils har fått i oppgave å vise den ene av Hamiltons ligninger:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}. \tag{4}$$

Løsningen hans er som følger:

"Fra $\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$ får vi ved hjelp av derivasjon at $\partial\mathcal{H}/\partial p = \dot{q}$."

Kritiser løsningen til Nils. Løs oppgaven slik du ville gjort det.

Oppgave 4 Flervalgsoppgaver

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått flere svar. Kun ett svar er riktig. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene skal ikke begrunnes. Det gis 0 poeng for hvert galt svar eller ubesvart.

a) En bonde ønsker å pumpe vann opp fra Tyrifjorden for å vanne jordene sine, som ligger 50 høydemetere over Tyrifjorden. Hvor kan han plassere pumpa?

1. Pumpa kan plasseres ved jordene, nede ved Tyrifjorden eller et sted i mellom.
2. Pumpa må plasseres (omtrent) nede ved Tyrifjorden.
3. Pumpa må plasseres (omtrent) ved jordene.
4. Det er ikke mulig å pumpe vann opp så mange høydemetere.
5. Det er gjedder i Tyrifjorden. De vil ødelegge pumpa.

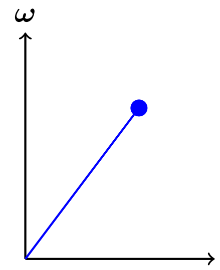
b) Stein Hiver står på ekvator og kaster en stein rett oppover. Idet steinen forlater hånda er hastigheten 10 m/s. Hva er Coriolisakselerasjonen akkurat da?

1. 0,5 mm/s^2 sørover
2. 0,5 mm/s^2 vestover
3. 1,0 mm/s^2 nordover
4. 1,0 mm/s^2 sørover
5. 1,5 mm/s^2 sørover
6. 1,5 mm/s^2 vestover
7. 2,0 mm/s^2 østover
8. 2,0 mm/s^2 nordover
9. 2,5 mm/s^2 nordøstover
10. 2,5 mm/s^2 nordvestover

c) Et stoff utvider seg likt i alle retninger og likt overalt, slik at volumet V endrer seg $V \to (1+3e)V$, der $e \ll 1$. Hvilken av disse deformasjonstensorene beskriver denne prosessen?

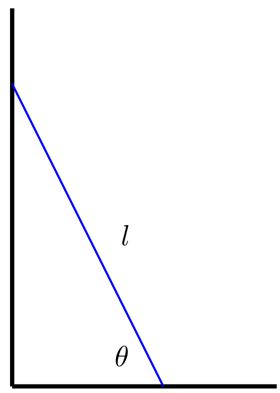
1. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & e & e \\ e & e & e \\ e & e & e \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & e & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$

d) Et legeme består av en punktmasse som sitter fast på enden av en masseløs stang, se figur. Stanga danner en vinkel på 30° med en vertikal akse. Legemet roteres om denne aksen, med vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$. Hva er rett?



1. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker begge rett oppover. Treghetsmomenttensoren $\mathbf{I}$ er diagonal.
2. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker begge rett oppover. Tensoren $\mathbf{I}$ er ikke diagonal.
3. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker begge rett oppover. Hvorvidt $\mathbf{I}$ er diagonal, er avhengig av hvordan vi velger koordinatsystemet.
4. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker i forskjellige retninger. Tensoren $\mathbf{I}$ er diagonal i etthvert koordinatsystem.
5. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker i forskjellige retninger. Hvorvidt $\mathbf{I}$ er diagonal, er avhengig av hvordan vi velger koordinatsystemet.

e) En stang med lengde l står inntil en friksjonsfri vegg. Stanga har konstant massetetthet per lengdeenhet. På bakken er friksjonskoeffisienten μ. Hva er den minste vinkelen θ som stanga kan ha i forhold til horisontalen, før den sklir?



1. Gitt av $\tan\theta = \frac{1}{2\mu}$.
2. Gitt av $\tan\theta = \frac{2}{\mu}$.
3. Gitt av $\tan\theta = \frac{\mu}{2}$.
4. Gitt av $\tan\theta = \frac{2\mu}{l}$.

5. Gitt av $\tan\theta = 2\mu$.
6. Gitt av $\tan\theta = \frac{\mu}{2\mu-1}$.
7. Gitt av $\tan\theta = \frac{\mu}{\mu-1}$.

f) Friksjonen på bakken i forrige deloppgave blir plutselig borte. Anta at stanga har massen m og treghetsmomentet $I = ml^2/12$ om midtpunktet (om en akse normalt på pc-skjermen). Hva blir bevegelsesligningen for θ?

1. $\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta$.
2. $\ddot{\theta} = -\frac{g}{12l}\sin^2\theta$.
3. $\ddot{\theta} = \frac{l}{g}\tan^2\theta$.
4. $\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\tan^2\theta$.
5. $\ddot{\theta} = \frac{2g}{3l}\sin\theta$.
6. $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$.
7. $\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\cos\theta$.
8. $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\cos\theta$.