Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett Eksamen vår 2024

Oppgave 1 Tekstsvaroppgaver

a) Beskriv med noen få setninger et eksperiment for å måle Youngs modul til en ståltråd med tverrsnittsareal A. Hva er enheten til Youngs modul?

Løsning: Ståltråden strekkes med en kraft F, og vi måler hvor mye lengre dl tråden har blitt. Opprinnelig lengde l måles også. Youngs modul blir da

$$\mathrm{YM} = \frac{F/A}{dl/l}. \tag{1}$$

Som vi ser fra formelen er enheten $\mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$.

b) Nevn og beskriv med noen få setninger hvordan du kan se eller merke Coriolis-krafta i dagliglivet.

Løsning: Corioliskrafta merkes på vindretningene. Når lufta blåser fra høytrykk til lavtrykk, vil luftstrømmen bøye av mot høyre på den nordlige halvkule.

Corioliskrafta kan også sees i form av Foucault-pendelen i Fysikkbygget. Krafta er liten, men når den virker over flere timer, blir svingeplanet synlig endret.

c) Vi ser på et fluid der hastigheten er $\mathbf{v}$ som funksjon av rom og tid. Forklar hvorfor den partiellderiverte som funksjon av tid, $\partial \mathbf{v}/\partial t$, *ikke* er akselerasjonen som trengs i Newtons 2. lov når man skal utlede bevegelsesligningen.

Løsning: Den partiellderiverte $\partial \mathbf{v}/\partial t$ er hvor mye hastigheten *i et gitt punkt* endrer seg med tiden. Men det er jo ikke den samme delen av fluidet som er i dette punktet ved tiden t og tiden $t + dt$. Vi må derfor i stedet bruke såkalt materialderivert, der vi følger strømmen til fluidet når vi ser på hvordan hastigheten varierer med tiden.

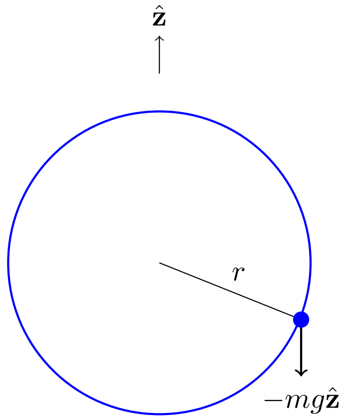
Oppgave 2 Partikkel på kule

En partikkel med masse m beveger seg langs en kuleoverflate med radius r. Det er ingen friksjon, men en føring som holder partikkelen til kuleoverflata. Det er en konstant tyngdekraft $-mg\hat{\mathbf{z}}$ overalt, dvs. nedover langs z-aksen.

a) Vis at Lagrangefunksjonen er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) - mgr\cos\theta, \tag{2}$$

for passende koordinater ϕ og θ. Tegn opp systemet der du angir disse koordinatene.



Løsning: En mulighet er å bruke den siste formelen på formelarket. Hastigheten er $d\mathbf{r}/dt$, og vi må sette $dr = 0$ siden partikkelen holdes til kuleflata. Ut fra hastigheten finner man kinetisk energi. Potensiell energi er $mgr\cos\theta$ hvis nullpunktet for potensiell energi settes i origo for det sfæriske koordinatsystemet, med vinkler θ (ned fra toppen av kula) og ϕ.

b) Vis at bevegelsesligningene for partikkelen er

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{konst.} \tag{3a}$$

$$r\ddot{\theta} = g\sin\theta + r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta. \tag{3b}$$

Løsning: Bruk Lagrange' ligninger.

c) Bruk spinn til å vurdere om bevegelsesligningene (3) er rimelige.

Løsning: Vi har kun en ekstern kraft i $-\hat{\mathbf{z}}$-retning, som gir et eksternt kraftmoment (om origo) i $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-retning (tegn figur!). Med andre ord har ikke kraftmomentet noen $\hat{\mathbf{z}}$-komponent, så $\hat{\mathbf{z}}$-komponenten av spinnet må være bevart. Spinnet er $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, så $\hat{\boldsymbol{\theta}}$-komponenten av $\mathbf{v}$ gir ikke noe bidrag til $\hat{\mathbf{z}}$-komponenten av spinnet. Vektoren $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\phi$ har både en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$- og en $\hat{\mathbf{z}}$-komponent. Den sistnevnte blir proporsjonal med $\dot{\phi}\sin^2\theta$, som viser at (3a) er rett.

For å vurdere om (3b) er rimelig går vi til spesialtilfellet at $g = 0$ (ingen tyngdekraft). Da er det ikke noe ekstern kraftmoment, så spinnet må være bevart. Siden vi allerede har sjekket (3a), setter vi $\dot{\phi} = 0$ som gir $\ddot{\theta} = 0$ og derfor konstant vinkelhastighet $\dot{\theta}$. Den horisontale spinnkomponenten er altså bevart i dette spesialtilfellet, som den må være.

Tips til resten av oppgaven:
Det holder å se på bevegelser der $\phi = 0$ hele tiden.

d) Er posisjonen på toppen av kula stabil? Dvs. hvis partikkelen forskyves bittelitt derfra, vil den bevege seg tilbake til toppen? Grunngi svaret ut fra bevegelsesligningene.

Løsning: Intuitivt er posisjonen på toppen av kula ustabil. En løsning av bevegelsesligningene finner vi ved å sette $\dot{\phi} = 0$ og løse $\ddot{\theta} = (g/r)\sin\theta \approx g\theta/r$, der tilnærmelsen gjelder så lenge θ er liten. Hvis θ øker litt ser vi at vinkelakselerasjonen $\ddot{\theta}$ blir positiv, som betyr at partikkelen akselererer bort fra toppen.

e) Vis at det fins et sted på kula der partikkelen kan oscillere med små utslag. Hvor er det, og hva blir frekvensen?

Løsning: Intuitivt vil den oscillere dersom den er nær bunnen av kula. Vi kan sette $\theta = \pi - \alpha$, der α er liten. Vi har $\sin\theta = \sin\alpha \approx \alpha$, og $\ddot{\theta} = -\ddot{\alpha}$. Med $\dot{\phi} = 0$ får vi $\ddot{\alpha} = -g\alpha/r = -\omega^2\alpha$, der $\omega^2 = g/r$. Den generelle løsningen av denne diffligningen er

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t - \delta), \tag{4}$$

der α_0 og δ er konstanter. Frekvensen er altså

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}. \tag{5}$$

(Svaret $\omega = \sqrt{g/r}$ godtas også.)

Oppgave 3 Diverse

a) Skisser en typisk ellipsebane for en satelitt som går i bane rundt jorda. Få med jorda i skissen. Hvor i banen har satelitten størst hastighet?

Løsning: Ellipsebane, jorda i ett av fokusene. Minst fart når lengst unna (pga. energibevaring).

b) En person sitter i en karusell. Tegn de horisontale kreftene som virker på personen dersom (i) du ser situasjonen fra bakke-systemet/labsystemet, og dersom (ii) du ser situasjonen fra karusell/det akselererte systemet. I karusellsystemet, har personen en akselerasjon?

Løsning: I bakke-systemet er det en sentripetalkraft inn mot sentrum av karusellen. I karusellsystemet er det en sentrifugalkraft utover, og en normalkraft/friksjonskraft innover; summen av disse er null.

I karusellsystemet har *ikke* personen en akselerasjon. Personen er jo i ro i dette systemet.

c) La ϱ være massetettheten, og $\mathbf{v}$ være hastigheten til et fluid/medium, som funksjon av rom og tid. Vi definerer videre $\mathbf{J} = \varrho\mathbf{v}$.

Bruk kontinuitetsligningen $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ til vise følgende ligning for massen m i et volum V:

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \tag{6}$$

der S er en lukket flate som omslutter V, som vi antar fast (ikke avhengig av tiden).

Hva er tolkningen til ligning (6)?

Løsning: Massen i V er $m = \int_V \varrho dV$. Deriver mhp. tiden, og bruk at V ikke avhenger av tiden så du kan derivere inne i integralet. Sett inn kontinuitetsligningen og bruk divergensteoremet.

Tolkningen er at strømmen av masse ut av et volum går på bekostning av masse i volumet. Altså bevaring av masse.

d) Vi ser på et system med kun én generalisert koordinat q. Generalisert driv defineres ved $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$, der $\mathcal{L}$ er Lagrangefunksjonen. Hamiltonfunksjonen defineres ved $\mathcal{H}(p,q) = p\dot{q} - \mathcal{L}$. Nils har fått i oppgave å vise den ene av Hamiltons ligninger:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}. \tag{7}$$

Løsningen hans er som følger:

"Fra $\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$ får vi ved hjelp av derivasjon at $\partial\mathcal{H}/\partial p = \dot{q}$."

Kritiser løsningen til Nils. Løs oppgaven slik du ville gjort det.

Løsning: Problemet med Nils' løsning, er at Hamiltonfunksjonen skal sees på som en funksjon av p og q, og når man partiellderiverer mht. p skal q holdes konstant, ikke $\dot{q}$. Dessuten vil jo også det andre leddet $-\mathcal{L}$ være avhengig av p i denne sammenhengen. Nils har derfor gjort to feil som tilfeldigvis til sammen gjør at svaret blir rett. (Evt. kan vi se på løsningen til Nils som ufullstendig – at han bare kommer med svaret på derivasjonen uten å faktisk gjøre den.)

Løsning: Tar utgangspunkt i $\mathcal{H}(p,q) = p\dot{q} - \mathcal{L}$. Når vi partiellderiverer mhp. p holdes q konstant. Bruker produktregelen på det første leddet og kjerneregelen på det andre:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}, \tag{8}$$

der vi brukte definisjonen av generalisert driv i siste overgang. Legg merke til at $\mathcal{L}$ er avhengig av ikke bare $\dot{q}$ men også q, men vi skal holde q konstant under derivasjonen.

Oppgave 4 Flervalgsoppgaver

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått flere svar. Kun ett svar er riktig. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene skal ikke begrunnes. Det gis 0 poeng for hvert galt svar eller ubesvart.

a) En bonde ønsker å pumpe vann opp fra Tyrifjorden for å vanne jordene sine, som ligger 50 høydemetere over Tyrifjorden. Hvor kan han plassere pumpa?

1. Pumpa kan plasseres ved jordene, nede ved Tyrifjorden eller et sted i mellom.
2. Pumpa må plasseres (omtrent) nede ved Tyrifjorden.
3. Pumpa må plasseres (omtrent) ved jordene.
4. Det er ikke mulig å pumpe vann opp så mange høydemetere.
5. Det er gjedder i Tyrifjorden. De vil ødelegge pumpa.

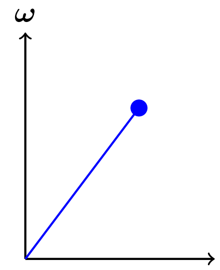
b) Stein Hiver står på ekvator og kaster en stein rett oppover. Idet steinen forlater hånda er hastigheten 10 m/s. Hva er Coriolisakselerasjonen akkurat da?

1. 0,5 mm/s^2 sørover
2. 0,5 mm/s^2 vestover
3. 1,0 mm/s^2 nordover
4. 1,0 mm/s^2 sørover
5. 1,5 mm/s^2 sørover
6. 1,5 mm/s^2 vestover
7. 2,0 mm/s^2 østover
8. 2,0 mm/s^2 nordover
9. 2,5 mm/s^2 nordøstover
10. 2,5 mm/s^2 nordvestover

c) Et stoff utvider seg likt i alle retninger og likt overalt, slik at volumet V endrer seg $V \rightarrow (1+3e)V$, der $e \ll 1$. Hvilken av disse deformasjonstensorene beskriver denne prosessen?

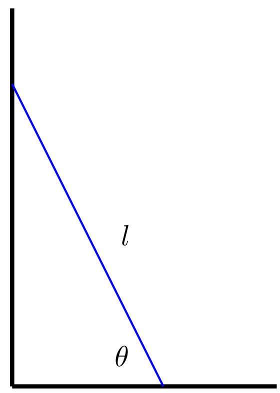
1. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & e & e \\ e & e & e \\ e & e & e \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & e & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$

d) Et legeme består av en punktmasse som sitter fast på enden av en masseløs stang, se figur. Stanga danner en vinkel på 30° med en vertikal akse. Legemet roteres om denne aksen, med vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$. Hva er rett?



1. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker begge rett oppover. Treghetsmomenttensoren $\mathbf{I}$ er diagonal.
2. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker begge rett oppover. Tensoren $\mathbf{I}$ er ikke diagonal.
3. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker begge rett oppover. Hvorvidt $\mathbf{I}$ er diagonal, er avhengig av hvordan vi velger koordinatsystemet.
4. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker i forskjellige retninger. Tensoren $\mathbf{I}$ er diagonal i etthvert koordinatsystem.
5. $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\omega}$ peker i forskjellige retninger. Hvorvidt $\mathbf{I}$ er diagonal, er avhengig av hvordan vi velger koordinatsystemet.

e) En stang med lengde l står inntil en friksjonsfri vegg. Stanga har konstant massetetthet per lengdeenhet. På bakken er friksjonskoeffisienten μ. Hva er den minste vinkelen θ som stanga kan ha i forhold til horisontalen, før den sklir?



1. Gitt av $\tan\theta = \frac{1}{2\mu}$.
2. Gitt av $\tan\theta = \frac{2}{\mu}$.
3. Gitt av $\tan\theta = \frac{\mu}{2}$.
4. Gitt av $\tan\theta = \frac{2\mu}{l}$.

5. Gitt av $\tan\theta = 2\mu$.
6. Gitt av $\tan\theta = \frac{\mu}{2\mu-1}$.
7. Gitt av $\tan\theta = \frac{\mu}{\mu-1}$.

f) Friksjonen på bakken i forrige deloppgave blir plutselig borte. Anta at stanga har massen m og treghetsmomentet $I = ml^2/12$ om midtpunktet (om en akse normalt på pc-skjermen). Hva blir bevegelsesligningen for θ?

1. $\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta$.
2. $\ddot{\theta} = -\frac{g}{12l}\sin^2\theta$.
3. $\ddot{\theta} = \frac{l}{g}\tan^2\theta$.
4. $\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\tan^2\theta$.
5. $\ddot{\theta} = \frac{2g}{3l}\sin\theta$.
6. $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$.
7. $\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\cos\theta$.
8. $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\cos\theta$.

Løsning: Svar: a) 2, b) 6, c) 2, d) 5, e) 1, f) 7.