Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett Prøveeksamen

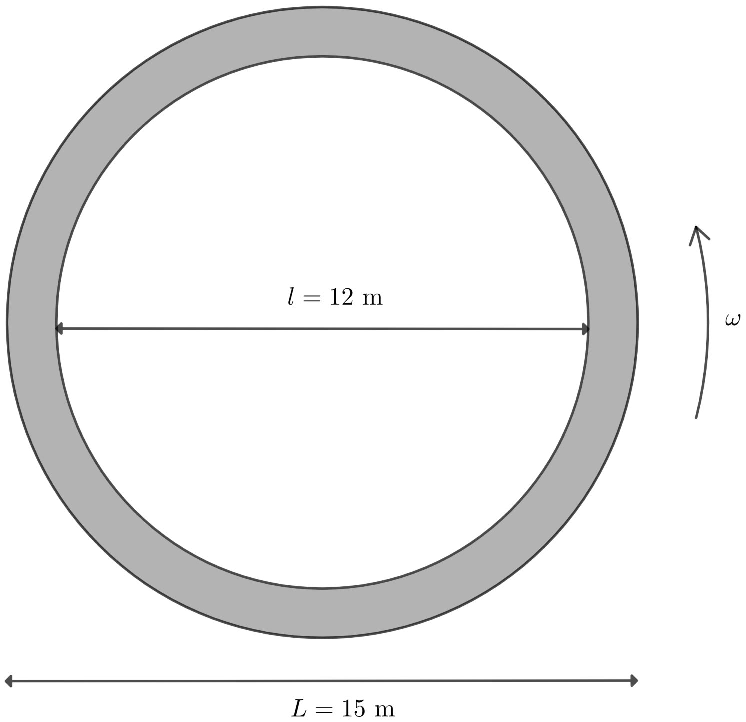
Oppgave 1 Tekstsvaroppgaver

a) Hvordan kan Corioliskraften forklare hvorfor orkaner nesten aldri oppstår i nærheten av ekvator?

Løsning: Orkaner oppstår ved at luft som trekkes inn mot lavtrykksområder blir avbøyd av Corioliskraften, og begynner å sirkulere. På den nordlige halvkule går denne sirkulasjonen mot klokka, mens på den sørlige halvkule går den med klokka. Ved ekvator virker det derimot ikke noen Corioliskraft langs jordoverflaten; om vi beveger oss litt bort fra ekvator begynner Corioliskraften å virke, men så lenge vi er nærme ekvator er den ikke kraftig nok til å danne orkaner.

Oppgave 2 Sentrifugal romstasjon

En tenkt romstasjon er formet som en torus (smultring), med indre diameter $l = 12$ m og ytre diameter $L = 15$ m (se figur 1). For å simulere tyngdekraft roterer romstasjonen med vinkelhastighet ω.



Figur 1: Torus-formet romstasjon (skalaen er ikke nødvendigvis riktig).

a) Vi ønsker at sentrifugalakselerasjonen ved gulvet i romstasjonen skal være litt under tyngdeakselerasjonen på jorda, $a = 9{,}0$ m/s^2. Hvor stor må rotasjonshastigheten ω være, målt i omdreininger per minutt, for å oppnå denne akselerasjonen?

Løsning: Fra formelsamlingen er sentrifugalkraften gitt ved $m\omega^2 r$; akselerasjonen er dermed $a = \omega^2 r$, hvor $r = L/2$. For å oppnå $a = 9\ \mathrm{m/s}^2$ må vinkelhastigheten dermed være

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{2a}{L}} = 1{,}095\ \mathrm{rad/s} = 1{,}095 \times \frac{60}{2\pi}\ \text{omdreininger/min.}\\ &\approx 10\ \text{omdreininger/min}\end{aligned}$$

En rotasjonshastighet på 10 omdreininger i minuttet vil altså gi den ønskede sentrifugalakselerasjonen.

b) En av astronautene i romstasjonen er $h = 2$ m høy. Hvor stor er forskjellen på sentrifugalakselerasjonen mellom føttene og hodet til denne astronauten?

Løsning: Sentrifugalakselerasjonen ved hodet til astronauten er gitt ved

$$\begin{aligned}a' &= \omega^2(L/2 - h) = \frac{L/2 - h}{L/2} a\\ &= 6{,}6\ \mathrm{m/s}^2.\end{aligned}$$

Sentrifugalakselerasjonen ved hodet til astronauten er altså 2,4 $\mathrm{m/s}^2$ mindre enn ved føttene; med andre ord, omtrent 27 prosent mindre.

Oppgave 3 Rotasjonen til en sylinder

a) Finn alle elementene til treghetsmoment-matrisen til en sylinder med masse M, radius R og høyde h, for rotasjon rundt massesenteret. Vi setter opp koordinatsystemet slik at massesenteret befinner seg i origo, og z-aksen peker langs sylinderen. Vi antar at massetettheten ϱ er konstant for hele sylinderen.

Løsning: Siden sylinderen er et kontinuerlig objekt må summene over partikler $\sum_\alpha$ (i formelsamlingen) skrives om til integraler. F.eks. $I_{xx} = \int dV\,\varrho\big(x^2+y^2\big)$ og $I_{xy} = -\int dV\,\varrho xy$.

Grunnet symmetrien til sylinderen får vi $I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$ (sylinderen er symmetrisk om alle tre aksene).

For de resterende elementene bruker vi sylinderkoordinater; $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$. Videre, siden massetettheten er konstant kan den skrives som $\varrho = M/\big(\pi R^2 h\big)$ og faktoriseres ut av integralene. For treghetsmomentet langs z-aksen finner vi

$$\begin{aligned}I_{zz} &= \frac{M}{\pi R^2 h}\int dV\,\underbrace{\big(x^2+y^2\big)}_{=r^2} = \frac{M}{\pi R^2 h}\underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} dz}_{=h}\,\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi}\,\underbrace{\int_0^R r dr\ r^2}_{=R^4/4}\\ &= \frac{1}{2}MR^2.\end{aligned}$$

På grunn av symmetri (igjen) må $I_{xx} = I_{yy}$, så det holder å regne ut ett av disse:

$$\begin{aligned}
I_{xx} = I_{yy} &= \frac{M}{\pi R^2 h} \int dV \left(x^2 + z^2\right) \\
&= \frac{M}{\pi R^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \left(r^2 \cos^2\phi + z^2\right) \\
&= \frac{M}{\pi R^2 h} \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} dz}_{=h} \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2\phi \underbrace{\int_0^R dr r^3}_{=R^4/4} \\
&\quad + \frac{M}{\pi R^2 h} \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} dz z^2}_{=h^3/12} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^R dr r}_{=R^2/2} .
\end{aligned}$$

Integralet over $\cos^2\phi$ kan regnes ut på flere måter, inkludert ved hjelp av delvis integrasjon, men kanskje den enkleste måten er å bruke formelen (f. eks. fra Rottmann) $\cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$. Dette gir

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi (1 + \cos 2\phi) = \pi,$$

slik at vi står igjen med

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M h^2.$$

For å oppsummere er treghetsmoment-tensoren gitt ved

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix}.$$

b) Den kinetiske energien til et legeme med spinn $\mathbf{L}$ og rotasjonshastighet $\boldsymbol{\omega}$ er gitt ved

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}).$$

Hvor kort må sylinderen være (med andre ord, hvor liten må h være) i forhold til tykkelsen R for at det skal kreves mindre energi å rotere rundt x-aksen ($\boldsymbol{\omega}_x = (\omega, 0, 0)$) enn rundt z-aksen ($\boldsymbol{\omega}_z = (0, 0, \omega)$), for samme rotasjonsfart ω?

Løsning: Den kinetiske energien for rotasjon rundt z-aksen er

$$T_z = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_z \cdot \mathbf{L}_z = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2}MR^2\omega\right) = \frac{1}{4}MR^2\omega^2.$$

For rotasjon rundt x-aksen finner vi

$$T_x = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_x \cdot \mathbf{L}_x = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2\right)\omega = \frac{1}{8}MR^2\omega^2 + \frac{1}{24}Mh^2\omega^2.$$

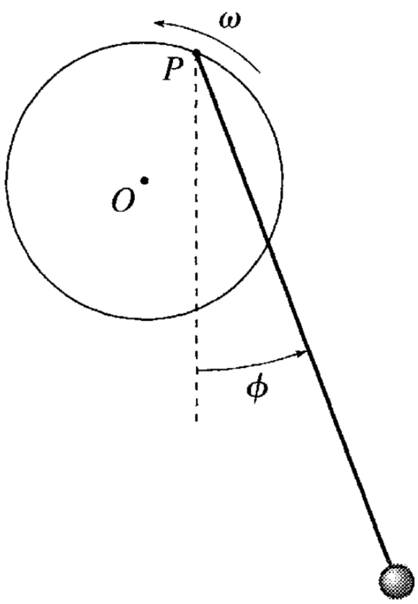
For å få $T_x < T_z$ må vi altså ha

$$\frac{1}{8}MR^2\omega^2 + \frac{1}{24}Mh^2\omega^2 < \frac{1}{4}MR^2\omega^2$$
$$\Rightarrow h^2 < 3R^2$$
$$\Rightarrow h < \sqrt{3}R.$$

For $h < \sqrt{3}R$ kreves det altså mindre kinetisk energi å rotere sylinderen rundt x- (eller y-) aksen med rotasjonsfart ω, enn rundt z-aksen med samme ω.

Oppgave 4 Pendel på hjul

(Taylor, oppgave 7.29) Figuren viser en pendel (masse m, lengde l) som er hengt på et hjul (sentrum O, radius R). Hjulet drives av en motor og roterer med vinkelhastighet ω. Ved $t = 0$ er punktet P på nivå med O og på høyre side.



Figur 2: Pendel på en roterende ring.

a) Hva er Lagrange-funksjonen?

Løsning: Den enkleste måten å finne den potensielle og kinetiske energien til pendelen er å regne ut posisjonen dens i forhold til O. Denne er gitt ved posisjonen til P i forhold til O, $\mathbf{r}_P = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)$, pluss posisjonen til pendelen i forhold til P, $\mathbf{r}' = (l\sin\phi, -l\cos\phi)$. Altså:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}' = (R\cos\omega t + l\sin\phi, R\sin\omega t - l\cos\phi).$$

Med dette kan vi finne den potensielle energien:

$$U = mg(R\sin\omega t - l\cos\phi).$$

For å regne ut den kinetiske energien trenger vi hastigheten, som vi finner ved å derivere posisjonen ovenfor med hensyn på tid:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \left(-\omega R \sin \omega t + \dot{\phi} l \cos \phi, \omega R \cos \omega t + \dot{\phi} l \sin \phi\right).$$

Den kinetiske energien er da

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left[\left(-\omega R \sin \omega t + \dot{\phi} l \cos \phi\right)^2 + \left(\omega R \cos \omega t + \dot{\phi} l \sin \phi\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2} m \Big[\omega^2 R \sin^2 \omega t + \dot{\phi}^2 l^2 \cos^2 \phi - 2\omega \dot{\phi} R l \sin \omega t \cos \phi \\ &\qquad + \omega^2 R^2 \cos^2 \omega t + \dot{\phi}^2 l^2 \sin^2 \phi + 2\omega \dot{\phi} R l \cos \omega t \sin \phi\Big] \\ &= \frac{1}{2} m \left[\omega^2 R^2 + \dot{\phi}^2 l^2 + 2\omega \dot{\phi} R l \sin(\phi - \omega t)\right], \end{aligned}$$

der vi har brukt formelen $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Vi kan nå skrive ned Lagrangefunksjonen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - U = &\frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 l^2 + m \omega \dot{\phi} R l \sin(\phi - \omega t) \\ &+ m g l \cos \phi - m g R \sin \omega t. \end{aligned}$$

b) Finn bevegelseslikningen for vinkelen ϕ.

Løsning: For å finne Lagrange-likningene for ϕ trenger vi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = m \omega \dot{\phi} R l \cos(\phi - \omega t) - m g l \sin \phi,$$

og

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{d}{dt} \left[m \dot{\phi} l^2 + m \omega R l \sin(\phi - \omega t)\right] \\ &= m \ddot{\phi} l^2 + m \omega R l \left(\dot{\phi} - \omega\right) \cos(\phi - \omega t). \end{aligned}$$

Lagrange-likningen blir da

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \\ \Rightarrow\ &\ddot{\phi} - \frac{\omega^2 R}{l} \cos(\phi - \omega t) + \frac{g}{l} \sin \phi = 0. \end{aligned}$$

c) Sjekk at bevegelseslikningen er rimelig for i grensen $\omega \to 0$.

Løsning: I denne grensen får vi likningen for en pendel, $\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0$, som for små utslag gir $\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$ med $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Det forventer vi jo også, siden $\omega = 0$ innebærer at hjulet står i ro.

Oppgave 5 Hull i en vannbøtte

a) En sylindrisk vannbøtte har en høyde h og en bunn med areal A_b. Den er først helt full med vann. Dessverre er det et lite hull med areal A_h i bunnen av bøtta. Hvor mye vann (masse) forsvinner ut av bøtta per tidsenhet helt til å begynne med?

Løsning: Vi regner vannet som ikke-viskøst og inkompressibelt. Vi antar også at vannstrømmen ut av hullet er homogen over tverrsnittet. Vi kaller hastigheten ut av hullet v. Denne hastigheten svarer til massestrømmen $I = \varrho v A_h$. For å finne v bruker vi Bernouillis teorem, der vi sammenligner et punkt ved vannoverflaten (der vi antar null hastighet), og et punkt i vannstrømmen rett utenfor hullet:

$$p_0 + \varrho g h = p_0 + \frac{1}{2}\varrho v^2. \tag{1}$$

Dette gir

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{2}$$

Vannstrømmen (i kg/s) blir

$$I = \varrho A_h \sqrt{2gh}. \tag{3}$$

b) Hvor lang tid tar det før bøtta er tom?

Løsning: Vannstrømmen går på bekostning av høyden z av vannet. I løpet av en liten tid dt forsvinner det et volum $I dt/\varrho = A_h\sqrt{2gz}dt$. Dette gir en endring dz av høyden:

$$dz = -\frac{A_h}{A_b}\sqrt{2gz}dt. \tag{4}$$

For å løse denne diffligningen kan vi se etter en substitusjon som gjør den enklere. Vi prøver med $z = u^2$, som gir $dz = 2udu$, slik at $2udu = -\frac{A_h}{A_b}\sqrt{2g}udt$ og derfor

$$\frac{du}{dt} = -\frac{A_h}{A_b}\sqrt{\frac{g}{2}}. \tag{5}$$

Dette betyr at $u(t)$ er en lineær funksjon som går fra $\sqrt{h}$ til 0 på tiden

$$t = \frac{\sqrt{h}}{\frac{A_h}{A_b}\sqrt{\frac{g}{2}}} = \frac{A_b}{A_h}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{6}$$

Om man ikke liker eller kommer på forenklingen med substitusjonen $z = u^2$ ovenfor, kan man i stedet bruke at diffligningen er separabel. Dvs. del (4) på $\sqrt{z}$. Da vil bare venstresiden ha med z å gjøre, og kan integreres mhp. z fra h til 0, mens høyresiden kan integreres mhp. t fra 0 til t.

Det er alltid lurt å sjekke om svaret er rimelig. For det første ser vi at enheten er rett. For det andre kan vi sammenligne med resultatet vi ville fått dersom vannet strømmet ut like fort som i a) hele tiden. Da ville vi fått tiden

$$\frac{\varrho A_b h}{\varrho A_h \sqrt{2gh}} = \frac{A_b}{A_h}\sqrt{\frac{h}{2g}}, \tag{7}$$

altså halvparten av den tiden vi har regnet ut i (6). Det virker rimelig, siden vi med (7) overestimerer vannstrømmen.

Oppgave 6 Spinn

a) En enkelt partikkel beveger seg. Posisjonen til partikkelen er $\mathbf{r}$. Hva er definisjonen på spinnet om et fast punkt (origo)? Hvis vi kaller dette spinnet $\mathbf{l}$, vis at $\dot{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\Gamma}$, der $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ er kraftmomentet på partikkelen.

b) Vis at for et system av N partikler, der det virker sentrale krefter mellom partiklene, har vi

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}.$$

Her er $\mathbf{L}$ totalt spinn (for alle partiklene), og $\boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$ er eksternt kraftmoment (dvs. kraftmoment pga. eksterne krefter).

Løsning: Se notater fra første forelesning, eller Taylor s. 90 og utover.

Oppgave 7 Flervalgsoppgaver

Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål.

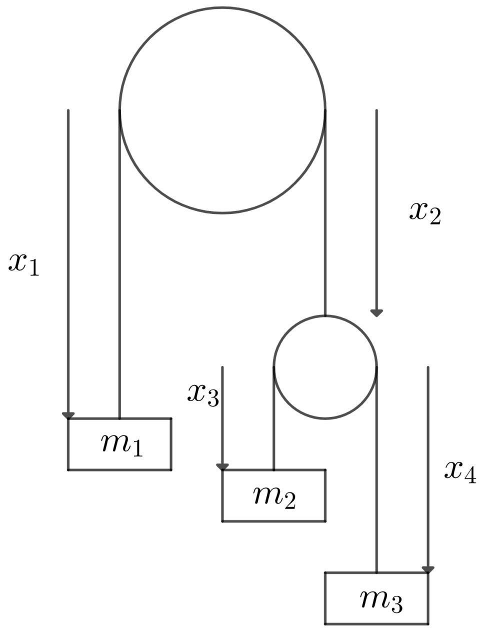
a) Du befinner deg i Oslo, omtrent 60° nord, og kjører sørover. Hvilken vei påvirker Corioliskraften deg?

1. Mot nord
2. Mot øst
3. Mot sør
4. Mot vest

b) Figur 3 viser en dobbel Atwood-maskin: En masseløs streng med fast lengde henger over en trinse; i den ene enden henger en masse m_1, og i den andre enden henger en *enkel* Atwood-maskin hvor to masser m_2 og m_3 henger fra hver sin ende av en masseløs streng med fast lengde, som passerer over en trinse. Vi anser begge trinsene som masseløse, og ser bort fra friksjon og treghetsmoment for begge trinsene.

Hvor mange frihetsgrader har systemet?

1. 1
2. 2
3. 3



Figur 3: Dobbel Atwood-maskin

4. 4
5. 5
6. π

c) Vi ser fortsatt på den doble Atwood-maskinen fra forrige oppgave. Hva er akselerasjonen til den venstre massen m_1? (Positiv retning er definert nedover)

1. $\ddot{x}_1 = \dfrac{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}g$
2. $\ddot{x}_1 = \dfrac{\left(m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3\right)^2}{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}g$
3. $\ddot{x}_1 = \dfrac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}g$
4. $\ddot{x}_1 = \dfrac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{\left(m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3\right)^2}g$

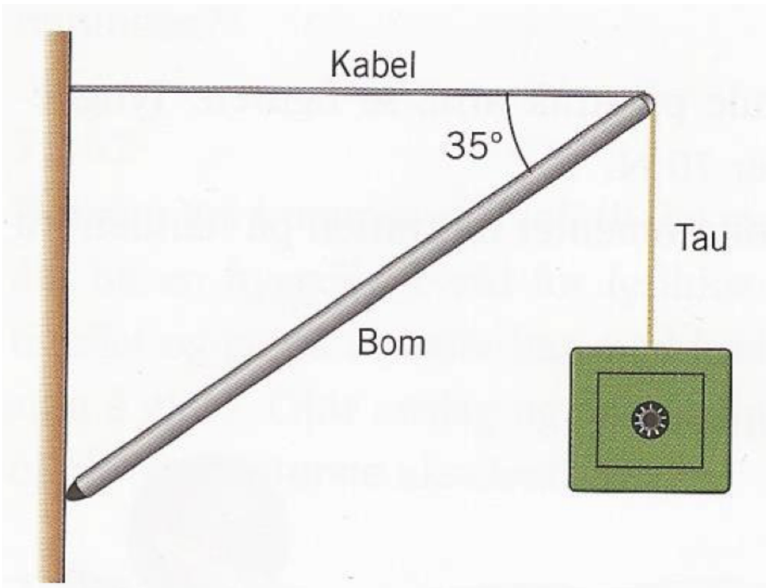
d) Hvilket utsagn om *normalmodusene,* $\mathrm{Re}\left(\mathbf{a}e^{i\omega t}\right)$ (notasjonen forklares under "oscillatorer" i formelsamlingen), til et system av koblede oscillatorer er sant?

1. Alle normalmodusene har samme frekvens ω.
2. Hvis den opprinnelige konfigurasjonen til systemet er proporsjonal med $\mathbf{a}$ vil systemet holde seg til denne normalmodusen.
3. Løsningen for normalmodusene er kun gyldig for små utslag av de generaliserte koordinatene.

4. Uavhengig av initialbetingelser vil systemet utvikle seg mot en av normalmodusene.

e) Figur 4 viser et pengeskap med massen 350 kg som henger fra en bom. Bommen har masse 75 kg, mens den horisontale kabelen og tauet har neglisjerbar masse. Finn draget i kabelen. Velg svaret som er nærmest.

1. 5,4 kN
2. 4,5 kN
3. 450 N
4. 540 N
5. 550 N
6. 460 N
7. 8,5 kN
8. 8,2 kN



Figur 4: Et pengeskap henger fra en bom.

Løsning: Fasit: a) 4, b) 2, c) 3, d) 2, e) 1.