Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

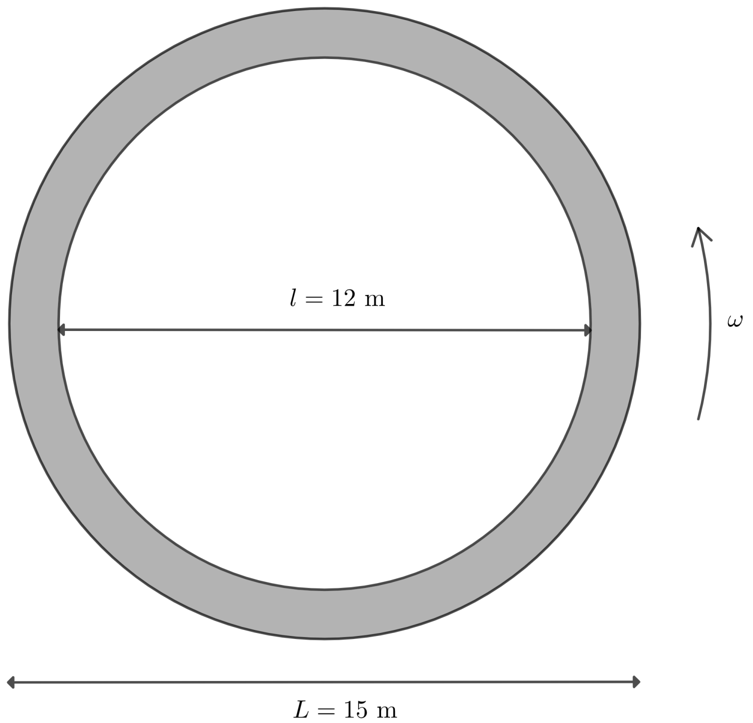
Oppgavesett Prøveeksamen

Oppgave 1 Tekstsvaroppgaver

a) Hvordan kan Corioliskraften forklare hvorfor orkaner nesten aldri oppstår i nærheten av ekvator?

Oppgave 2 Sentrifugal romstasjon

En tenkt romstasjon er formet som en torus (smultring), med indre diameter $l = 12$ m og ytre diameter $L = 15$ m (se figur 1). For å simulere tyngdekraft roterer romstasjonen med vinkelhastighet ω.



Figur 1: Torus-formet romstasjon (skalaen er ikke nødvendigvis riktig).

a) Vi ønsker at sentrifugalakselerasjonen ved gulvet i romstasjonen skal være litt under tyngdeakselerasjonen på jorda, $a = 9{,}0\ \mathrm{m/s^2}$. Hvor stor må rotasjonshastigheten ω være, målt i omdreininger per minutt, for å oppnå denne akselerasjonen?

b) En av astronautene i romstasjonen er $h = 2$ m høy. Hvor stor er forskjellen på sentrifugalakselerasjonen mellom føttene og hodet til denne astronauten?

Oppgave 3 Rotasjonen til en sylinder

a) Finn alle elementene til treghetsmoment-matrisen til en sylinder med masse M, radius R og høyde h, for rotasjon rundt massesenteret. Vi setter opp koordinatsystemet slik at massesenteret befinner seg i origo, og z-aksen peker langs sylinderen. Vi antar at massetettheten ϱ er konstant for hele sylinderen.

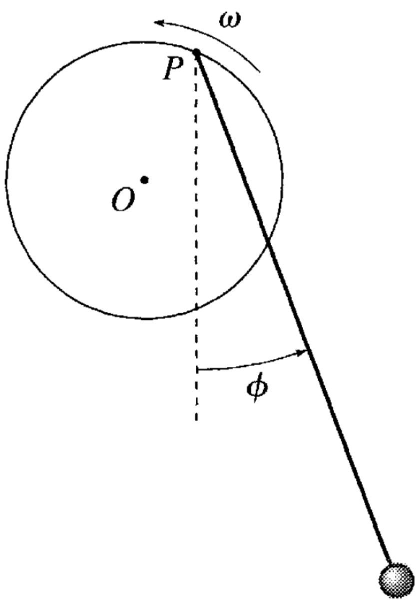
b) Den kinetiske energien til et legeme med spinn $\mathbf{L}$ og rotasjonshastighet $\boldsymbol{\omega}$ er gitt ved

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}).$$

Hvor kort må sylinderen være (med andre ord, hvor liten må h være) i forhold til tykkelsen R for at det skal kreves mindre energi å rotere rundt x-aksen ($\boldsymbol{\omega}_x = (\omega, 0, 0)$) enn rundt z-aksen ($\boldsymbol{\omega}_z = (0, 0, \omega)$), for samme rotasjonsfart ω?

Oppgave 4 Pendel på hjul

(Taylor, oppgave 7.29) Figuren viser en pendel (masse m, lengde l) som er hengt på et hjul (sentrum O, radius R). Hjulet drives av en motor og roterer med vinkelhastighet ω. Ved $t = 0$ er punktet P på nivå med O og på høyre side.



Figur 2: Pendel på en roterende ring.

a) Hva er Lagrange-funksjonen?

b) Finn bevegelseslikningen for vinkelen ϕ.

c) Sjekk at bevegelseslikningen er rimelig for i grensen $\omega \to 0$.

Oppgave 5 Hull i en vannbøtte

a) En sylindrisk vannbøtte har en høyde h og en bunn med areal A_b. Den er først helt full med vann. Dessverre er det et lite hull med areal A_h i bunnen av bøtta. Hvor mye vann (masse) forsvinner ut av bøtta per tidsenhet helt til å begynne med?

b) Hvor lang tid tar det før bøtta er tom?

Oppgave 6 Spinn

a) En enkelt partikkel beveger seg. Posisjonen til partikkelen er $\mathbf{r}$. Hva er definisjonen på spinnet om et fast punkt (origo)? Hvis vi kaller dette spinnet $\mathbf{l}$, vis at $\dot{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\Gamma}$, der $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ er kraftmomentet på partikkelen.

b) Vis at for et system av N partikler, der det virker sentrale krefter mellom partiklene, har vi

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}.$$

Her er $\mathbf{L}$ totalt spinn (for alle partiklene), og $\boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$ er eksternt kraftmoment (dvs. kraftmoment pga. eksterne krefter).

Oppgave 7 Flervalgsoppgaver

Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål.

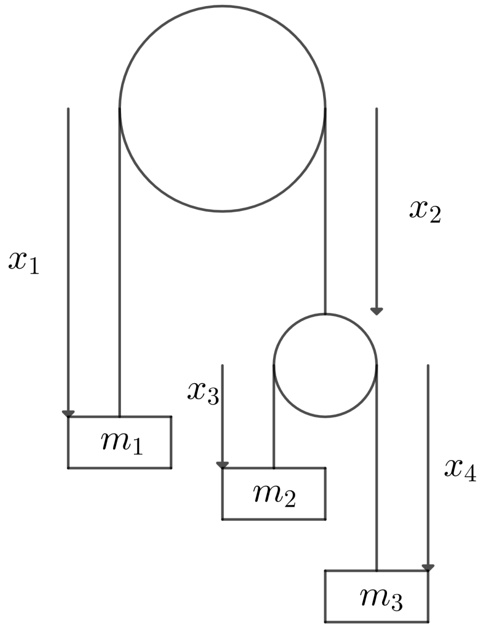
a) Du befinner deg i Oslo, omtrent 60° nord, og kjører sørover. Hvilken vei påvirker Corioliskraften deg?

1. Mot nord
2. Mot øst
3. Mot sør
4. Mot vest

b) Figur 3 viser en dobbel Atwood-maskin: En masseløs streng med fast lengde henger over en trinse; i den ene enden henger en masse m_1, og i den andre enden henger en *enkel* Atwood-maskin hvor to masser m_2 og m_3 henger fra hver sin ende av en masseløs streng med fast lengde, som passerer over en trinse. Vi anser begge trinsene som masseløse, og ser bort fra friksjon og treghetsmoment for begge trinsene.

Hvor mange frihetsgrader har systemet?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. π



Figur 3: Dobbel Atwood-maskin

c) Vi ser fortsatt på den doble Atwood-maskinen fra forrige oppgave. Hva er akselerasjonen til den venstre massen m_1? (Positiv retning er definert nedover)

1. $\ddot{x}_1 = \dfrac{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}g$

2. $\ddot{x}_1 = \dfrac{(m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3)^2}{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}g$

3. $\ddot{x}_1 = \dfrac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}g$

4. $\ddot{x}_1 = \dfrac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{(m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3)^2}g$

d) Hvilket utsagn om *normalmodusene,* $\mathrm{Re}\big(\mathbf{a}e^{i\omega t}\big)$ (notasjonen forklares under "oscillatorer" i formelsamlingen), til et system av koblede oscillatorer er sant?

1. Alle normalmodusene har samme frekvens ω.

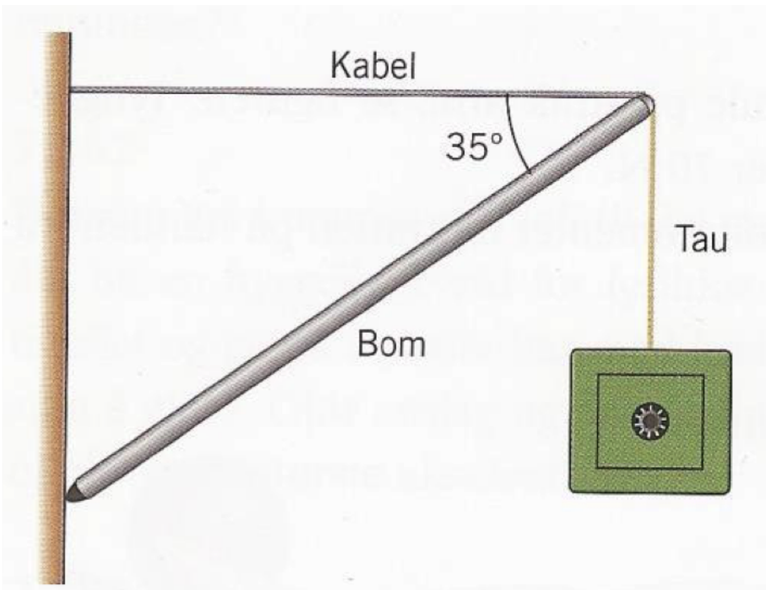
2. Hvis den opprinnelige konfigurasjonen til systemet er proporsjonal med $\mathbf{a}$ vil systemet holde seg til denne normalmodusen.

3. Løsningen for normalmodusene er kun gyldig for små utslag av de generaliserte koordinatene.

4. Uavhengig av initialbetingelser vil systemet utvikle seg mot en av normalmodusene.

e) Figur 4 viser et pengeskap med massen 350 kg som henger fra en bom. Bommen har masse 75 kg, mens den horisontale kabelen og tauet har neglisjerbar masse. Finn draget i kabelen. Velg svaret som er nærmest.

1. 5,4 kN
2. 4,5 kN
3. 450 N
4. 540 N
5. 550 N
6. 460 N
7. 8,5 kN
8. 8,2 kN



Figur 4: Et pengeskap henger fra en bom.