Fra før: $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext}$
$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}^{ext}$

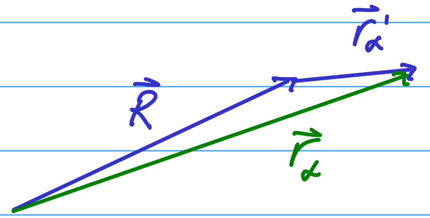
Rotasjon (T. kap 10)

1) Spinn $\vec{L} = \vec{L}$(bevegelse av CM) $+$ $\vec{L}$(bevegelse relativt til CM)

2) Kin.en. $T = T$(") $+$ T(")

Bevis 2) Oppgave.

Bevis 1)



$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}_\alpha'$, $\vec{R} = \dfrac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}$

$\dot{\vec{r}}_\alpha = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_\alpha'$

Spinn partikkel α: $\vec{l}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$

Totalt: $\vec{L} = \sum_\alpha \vec{l}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$

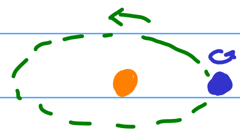
$$= \sum_\alpha \vec{R} \times m_\alpha \dot{\vec{R}} + \sum_\alpha \vec{R} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha' + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha' \times m_\alpha \dot{\vec{R}} + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha' \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha'$$

$$= \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \cancel{\vec{R} \times \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha'} + \cancel{\Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha'\Big)} \times \dot{\vec{R}} + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha' \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha'$$

Har at $M\vec{R} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha (\vec{R} + \vec{r}_\alpha') = M\vec{R} + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha'}_{=0}$

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha' \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha' \qquad \square$$

F.eks. for en planet rundt sola: $\vec{L} = \vec{L}_{bane} + \vec{L}_{egen}$
banespinn + egenspinn



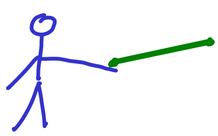
Vi har $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}^{ext}$, så:

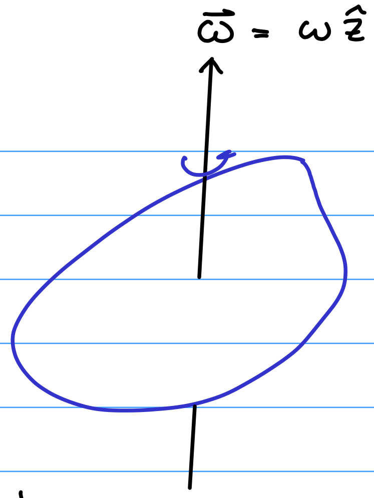
$$\dot{\vec{L}} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ext} = \sum (\vec{r}_\alpha' + \vec{R}) \times \vec{F}_\alpha^{ext} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha' \times \vec{F}_\alpha^{ext} + \vec{R} \times \vec{F}^{ext} \qquad (*)$$

Dessuten har vi: $\vec{L}_{bane} = \vec{R} \times \vec{P} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{bane} = \cancel{\dot{\vec{R}} \times \vec{P}} + \vec{R} \times \dot{\vec{P}} = \vec{R} \times \vec{F}^{ext}$ $(**)$

Subtraherer $(*) - (**)$: $\underline{\dot{\vec{L}}_{egen}} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha' \times \vec{F}_\alpha^{ext} = \underline{\vec{\tau}^{ext} \text{(om CM)}}$

Nyttig resultat! F.eks.: Kast av pinne





Rotasjon rundt en fast akse

$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$

Partikkel α har hastighet

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \end{vmatrix} = (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0)$$

og spinn

$$\vec{\ell}_\alpha = m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = m_\alpha \omega \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ -y_\alpha & x_\alpha & 0 \end{vmatrix} = m_\alpha \omega \left(-z_\alpha x_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2\right)$$

Totalt: $\vec{L} = \sum_\alpha \vec{\ell}_\alpha$

$$\underline{L_z} = \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\omega = \sum_\alpha m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega = \underline{I_{zz}\omega},$$

der $I_{zz} = \sum_\alpha m_\alpha \rho_\alpha^2$, $\rho_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$.

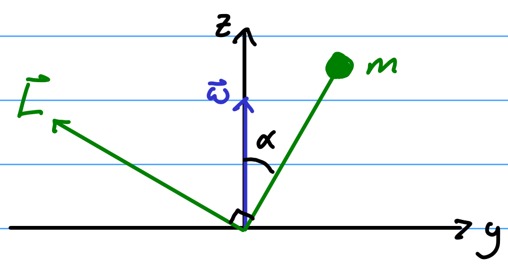
treghetsmoment om z-aksen

$$\underline{T} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\rho_\alpha \omega)^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega^2 = \underline{\frac{1}{2} I_{zz} \omega^2}$$

$$L_x = -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha \omega, \quad L_y = -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega$$

<u>Dvs. $\vec{L}$ og $\vec{\omega}$ er ikke nødvendigvis i samme retning!</u>

Eks: Her har $\vec{L}$ og $\vec{\omega}$ ulik retn.:
Dessuten er ikke $\vec{L}$ konst. her,
så et kraftmoment trengs
for å opprettholde rotasjonen.



Rotasjon rundt vilkårlig akse

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha , \quad \text{der} \quad \vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha , \qquad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$
$$\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$$

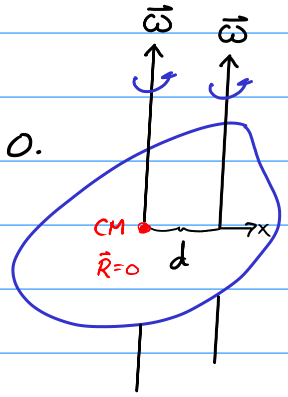
$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha), \quad \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \ldots = \big((y^2+z^2)\omega_x - xy\,\omega_y - xz\,\omega_z ,\; -yx\,\omega_x + (z^2+x^2)\omega_y - yz\,\omega_z ,\; -zx\,\omega_x - zy\,\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z \big)$$

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \qquad I_{xx} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$$
$$I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha$$
$$I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha$$
$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \qquad I_{yx} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha$$
$$\vdots$$
$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

$$\vec{L} = \underline{I}\,\vec{\omega}, \quad \text{der} \quad \underline{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{treghetsmoment-tensor}}, \quad \text{og} \quad \underline{I} \text{ er } \underline{\text{symmetrisk}}!$$

Parallellakse-teoremet (Steiners sats)

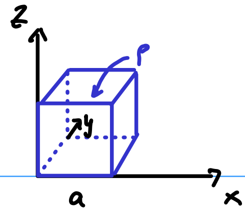
I_{cm} = treghetsmom. tensor om CM = origo. I om $x = d$, $y = z = 0$.



$$I_{zz} = \sum_\alpha m_\alpha \left[(x_\alpha + d)^2 + y_\alpha^2 \right] = \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) + 2d \cancel{\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha} + d^2 \sum_\alpha m_\alpha$$
$$= I_{cm\,zz} + M d^2$$
$$I_{xz} = -\sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha + d) z_\alpha = I_{cm\,xz} - \cancel{d \sum_\alpha m_\alpha z_\alpha}$$

$$0 = \vec{R} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}$$

Eks: Treghetsmoment-tensor for en kube om et hjørne



$$I_{zz} = \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \approx \int_{\square} (x^2+y^2)\,\underbrace{\rho\, dV}_{dm}$$

volumintegral

dm = masse til et volumelement med volum $dV = dx\,dy\,dz$.

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}a^3 \cdot a \cdot a = \frac{a^5}{3}$$

$$\Rightarrow I_{zz} = \frac{2}{3}\rho a^5 = \frac{2}{3}Ma^2 = I_{xx} = I_{yy}$$

$$I_{xy} = -\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz\, \rho xy = -\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a\,\rho = -\frac{1}{4}\rho a^5 = -\frac{1}{4}Ma^2$$

$$I = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

I symmetrisk, men ikke diagonal.

Vi har $\vec{L} = I\vec{\omega}$, dvs. f.eks.:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \frac{Ma^2\omega}{12}\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \not\parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \frac{Ma^2}{6}\vec{\omega} \parallel \vec{\omega}$$

Dvs. kuben kan spinne stabilt av seg selv rundt hoveddiagonalen, men ikke rundt f.eks. x-aksen.

Treghetmoment om sentrum av kuben:

$$I_{zz} = \int_{-a/2}^{a/2}\int\int (x^2+y^2)\rho\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{6}Ma^2 \quad \left(\text{fordi } \int_{-a/2}^{a/2} x^2\,dx = \frac{1}{3}(a/2)^3 \cdot 2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}a^3\right)$$

$$I_{xz} = I_{xy} = \ldots = 0 \quad \text{fordi f.eks. } \int_{-a/2}^{a/2} x\,dx = 0.$$

$$I = \frac{1}{6}Ma^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dvs. kuben kan spinne stabilt av seg selv rundt hvilken som helst akse som går gjennom sentrum av kuben.

Integralnotasjon i fysikk

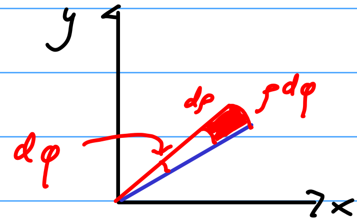
$$\int dx\, f(x) = \int f(x)\, dx, \qquad \int dx\, f(x) \int dy\, g(x,y) = \iint f(x)\, g(x,y)\, dx\, dy$$

↑ vanlig i fysikk

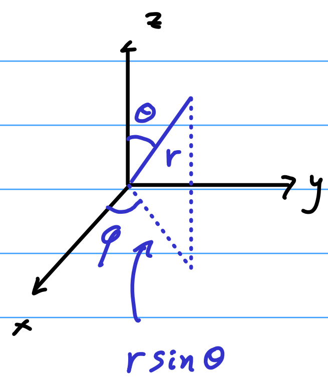
Volumintegraler

$$\int \rho\, dV = \int dx \int dy \int dz\, \rho(x,y,z), \qquad dV = dx\,dy\,dz \text{ i kart. k.}$$

$$\int \rho\, dV = \int dz \int d\varphi \int d\rho\, \rho\; \rho(\rho,\varphi,z), \qquad dV = dz\, \rho\, d\varphi\, d\rho \text{ i syl. k.}$$



$$\int \rho\, dV = \int d\varphi \int d\theta \sin\theta \int dr\, r^2\, \rho(r,\theta,\varphi), \qquad dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \text{ i sfær. k.}$$



Hovedakser for treghetsmoment

Hovedakse: Retning for $\vec{\omega}$ slik at $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

Finne hovedakser: $\vec{L} = \lambda \vec{\omega}$ (λ skalar)

$$I \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega}$$

Dvs.: Hovedaksene er langs egenvektorene til I.

Fra matematikk: Symmetriske, reelle $n \times n$-matriser har n ortogonale egenvektorer.

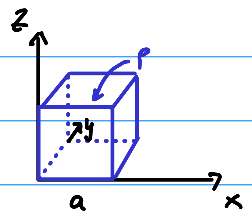
Dvs: Det fins alltid 3 ortogonale hovedakser! (Selv om legemet ikke har åpenbar symmetri.)

Finne hovedaksene: $(I - \lambda \mathbb{1}) \vec{\omega} = 0$ (*)

$\det(I - \lambda \mathbb{1}) = 0$, gir egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Substituer λ_1 osv inn i (*) $\Rightarrow$ egenvektorer $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$.

Eks: $I = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$.



Kan finne egenv. på vanlig måte. Evt. sjekke at $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en av egenvektorene: $I\vec{\omega} = 2\vec{\omega}$.

Dette visste vi fra før...

Diagonalisering:

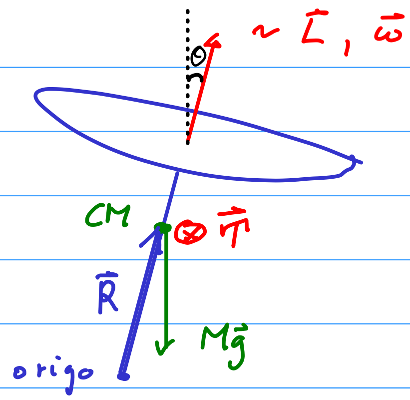
$$I = R I' R^T = R \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} R^T, \qquad R^T = R^{-1} = \text{rotasjonsmatrise.}$$

Testspørsmål: Hva er treghetsmomentet for rotasjon om origo langs $\vec{\omega}_1$? $\vec{\omega}_2$? $\vec{\omega}_3$?

Treghetsmom. tensor når koordinatakser langs hovedaksene: $I' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Presesjon

Eks: Snurrebass



$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$, $|\vec{\tau}| = |\vec{R} \times M\vec{g}| = MRg\sin\theta$

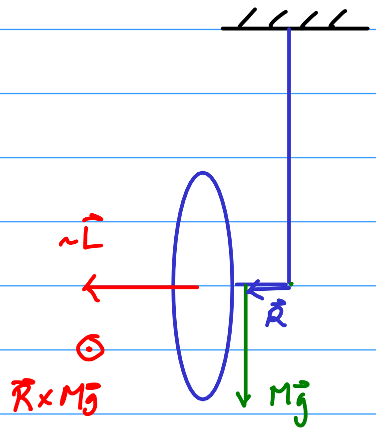
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$

$\vec{L}(t+dt) = \vec{L}(t) + \vec{\tau}\,dt$

$\Rightarrow$ presesjon.

Eks: Hjul:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$, $\tau = MRg$



Eulerligningene

I labsystemet: $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{lab} = \vec{\tau}$

Fra før har vi: $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{lab} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{legeme} + \vec{\omega} \times \vec{L}$

$= \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$ $\left[\dot{\ }\text{ betyr } \left(\frac{d}{dt}\right)_{legeme}\right]$

$$\boxed{\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\tau}}$$

Eulerligningene, sett fra legemet!

Spes. tilfelle: $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$: $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$

Spesialtilfelle: $\vec{\tau} = 0$: $\dot{\vec{L}} = -\vec{\omega} \times \vec{L}$

Fritt, spinnende legeme

Eulerligningene: $\dot{\vec{L}} = -\vec{\omega} \times \vec{L}$ sett fra ref.systemet til legemet.

Har også $\vec{L} = I\vec{\omega}$, $I = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix}$ når xyz er langs hovedaksene.

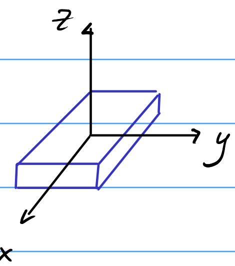
$$\vec{\omega} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{vmatrix} = (\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2,\ \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3,\ \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1)$$

$$= (\omega_2\omega_3\lambda_3 - \omega_2\omega_3\lambda_2,\ \omega_1\omega_3\lambda_1 - \omega_1\omega_3\lambda_3,\ \omega_1\omega_2\lambda_2 - \omega_1\omega_2\lambda_1)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1\dot{\omega}_1 = (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 \qquad (1)$$

$$\lambda_2\dot{\omega}_2 = (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_1\omega_3 \qquad (2)$$

$$\lambda_3\dot{\omega}_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 \qquad (3)$$



Anta λ_1, λ_2, λ_3 forskjellige.

Ved $t=0$ anta at $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Gir $\vec{\omega}$ uavh. av t.

Ved $t=0$ anta at $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$. Gir $\vec{\omega}$ avh. av t.

Altså (bare) hvis rotasjonen er langs en hovedakse, vil den være tidsuavh.

Er rotasjon om en hovedakse stabil?

Anta ~rotasjon om z-aksen, dvs $\omega_3 \neq 0$ mens ω_1 og ω_2 er små.

(3) $\Rightarrow$ $\omega_3 \sim$ konst

(1) og (2) gir $\ddot{\omega}_1 = -\dfrac{(\lambda_3 - \lambda_2)\omega_3^2(\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}\omega_1$

Hvis $\begin{cases} \lambda_3 > \lambda_2 \\ \lambda_3 > \lambda_1 \end{cases}$ eller $\begin{cases} \lambda_3 < \lambda_2 \\ \lambda_3 < \lambda_1 \end{cases}$ blir det stabilt. Ellers ustabilt.

Så stabilt for rotasjon om hovedaksene med størst og minst treghetsmom., om x- og z-aksen på figuren. Ustabilt om y-aksen.