Litt fluidmekanikk

Materialbeskrivelse: F.eks. deformasjon slik at volumelementet som var i $\vec{r}$ flyttes til $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$. Egnet for faste stoffer.

Romlig beskrivelse: Ser på tetthet $\rho(\vec{r},t)$ og hastighet $\vec{v}(\vec{r},t)$ som funksjon av t for et fast punkt $\vec{r}$. Egnet for fluider.

ble kalt $\vec{J}$ = strømtetthet

Vi har allerede vist at massebevaring gir $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

det som strømmer ut av punktet

går på bekostning av tettheten i punktet

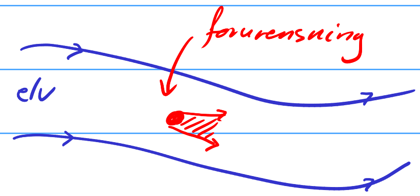
Ønsker å formulere Newtons 2. lov $\vec{F} = m\vec{a}$ i et fluid.
Her er $\vec{a}$ akselerasjonen til en gitt liten del av fluidet.
Mens $\frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t}$ er endring/tid av $\vec{v}(\vec{r},t)$ i punktet $\vec{r}$.

Se først på tettheten $\rho(\vec{r},t)$. Ønsker å finne hvordan tettheten til en gitt liten del av fluidet endrer seg, målt fra en båt som flyter nedover elva.

Ved t: $\rho(\vec{r},t)$

Ved $t+dt$: $\rho(\underbrace{\vec{r}+d\vec{r}}, t+dt)$

etter at det har gått en tid dt, har vannet ved $\vec{r}$ flyttet seg til $\vec{r}+d\vec{r}$.



$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho(\vec{r}+d\vec{r}, t+dt) - \rho(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial r_i} dr_i}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial r_i}}_{(\nabla \rho)_i} \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{v_i}$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

materialderivert / partikkelderivert
Skrives også ofte $\frac{D\rho}{Dt}$

Tilsvarende: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$

akselerasjonen til et volumelement med fluid

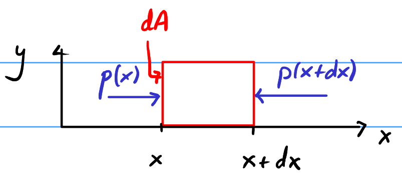
Merk:
$(\nabla \vec{v})_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$
mens
$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

Bevegelseslikning for et ikke-viskøst fluid

Ett volumelement som følger fluidet: $\rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{vol} + \vec{F}_{sur}$

$\vec{F}_{vol}$: $\rho dV \vec{g}$ $\vec{F}_{sur}$: kraft på overflaten

Fordi viskositeten er null, er det ingen skjærkrefter.
Må finne $\vec{F}_{sur}$ pga trykket $p = p(\vec{r})$.



$$F_{sur,x} = p(x)dA - p(x+dx)dA$$
$$= -\frac{p(x+dx)-p(x)}{dx}\,dx\,dA = -\frac{dp}{dx}\,dV$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{sur} = -\nabla p\, dV$$

Alternativ metode: (uavh. av formen på dV)

Kraft på $d\vec{A}$: $\Sigma d\vec{A}$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_{sur} = \oint \Sigma\, d\vec{A}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{bmatrix}dA_1\\ dA_2\\ dA_3\end{bmatrix}}_{d\vec{A}}$$

x-komponent: $F_{sur,x} = \oint \vec{\Sigma}_x \cdot d\vec{A}$
$$= \int \nabla\cdot\vec{\Sigma}_x\, dV$$
$$= \nabla\cdot\vec{\Sigma}_x\, dV$$

x-komponent:
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\end{bmatrix}}_{\vec{\Sigma}_x}\begin{bmatrix}dA_1\\ dA_2\\ dA_3\end{bmatrix}$$

Isotropt trykk: $\Sigma = -p\mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{\Sigma}_x = -\frac{\partial p}{\partial x}$

Gir $\vec{F}_{sur} = -\nabla p\, dV$

$$\Rightarrow \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho dV\vec{g} - \nabla p\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{g} - \nabla p}$$ bevegelseslikning for ikke-viskøs væske.

Viskøs, kompressibel væske: $\rho \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}} = \rho\vec{g} - \nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \kappa\nabla(\nabla\cdot\vec{v})$

$\nu\nabla^2\vec{v}$: pga viskositet $\kappa\nabla(\nabla\cdot\vec{v})$: hvis også kompressibelt

$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$ ← ikke-lineært ledd

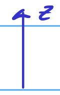
Navier–Stokes' ligning: Meget stor betydning!

Bernoullis teorem (Bernoulli-prinsippet)

Anta ikke-viskøs væske.

Anta jevn flyt: $\vec{v}(\vec{r})$, $\rho(\vec{r})$ og $p(\vec{r})$ uavh. av t for fast punkt $\vec{r}$.

Anta inkompressibel væske: ρ ~ uavhengig av $\vec{r}$.



Bev.lign: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(\rho g z + p)$

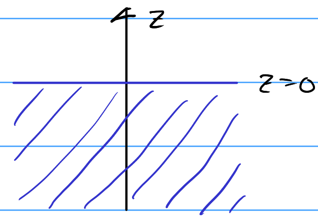
$$\rho\, \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v} \cdot \nabla(\rho g z + p) = -\left(\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}\right)(\rho g z + p) = -\frac{d}{dt}(\rho g z + p)$$

jevn flyt så $\frac{\partial}{\partial t}$ gir null

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho \vec{v}^2\right) = -\frac{d}{dt}(\rho g z + p)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{konst langs flyten til fluidet}}$$



Eks: Hva er trykket som funksjon av dybde i havet?
Sammenligner et punkt rett under overflaten og et ved z (der $z < 0$).
Bernouilli-prinsippet gir: $p_0 = \rho g z + p$

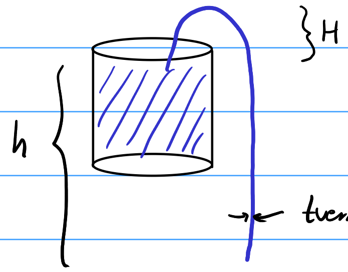
lufttrykket ved havoverflaten ≈ 101 kPa

$\underline{p = p_0 - \rho g z}$.

Hvor langt ned må du dykke for at $p = 2p_0 = 2\,\text{atm} = 2 \cdot 101\,\text{kPa}$?

$$-z = \frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{101 \cdot 10^3\,\text{N/m}^2}{10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2} \approx \underline{10\,\text{m}}$$

Eks: Hevert. Hvor mye vann kommer det ut av slangen per tidsenhet?



Bernoulli: $\underbrace{p_0 + \rho g h}_{\text{et punkt i vannet øverst i bøtta}} = \underbrace{p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{et punkt i vannstrålen rett nedenfor slangen}}$

$\Rightarrow \; v = \sqrt{2gh}$

Vannstrøm: $I = \rho v A = \rho A\sqrt{2gh}$ (i kg/s) evt. $A\sqrt{2gh}$ i m^3/s.

Kan H være vilkårlig høy?

Svar: Sammenligner et punkt øverst i bøtta med toppen av slangen.

$p_0 + \rho g h = P + \rho g(h+H) + \frac{1}{2}\rho v^2$

$p_0 = P + \rho g H + \frac{1}{2}\rho v^2$

H blir størst hvis P er minst mulig. Setter derfor $P = 0$.

$p_0 = \rho g H + \frac{1}{2}\rho v^2$

$\Rightarrow H = \frac{p_0}{\rho g} - \frac{v^2}{2g} \leq \frac{p_0}{\rho g} \approx 10\,m$

Hvis h er som ovenfor, får vi maks $H = \frac{p_0}{\rho g} - h$

(hvis dette er positivt. Hvis ikke, virker ikke heverten. Dvs. den slutter å virke hvis $h > \frac{p_0}{\rho g}$.)

Eks: Flyvinge, papirark. Misforståelser...