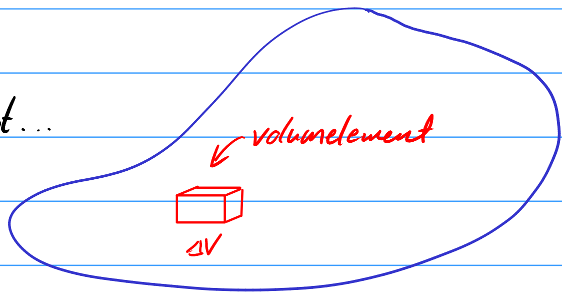
Kontinuumsmekanikk

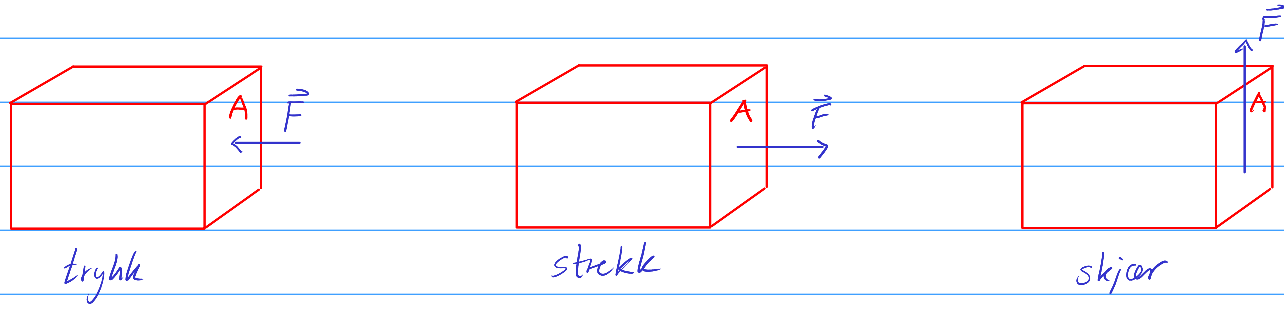
Ser på fast stoff som ikke er helt fast...



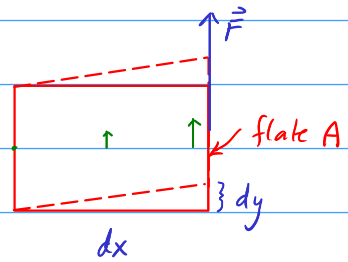
Volumkrefter : $\rho \Delta V \vec{g}$ (tyngdekraft på ΔV).

Flatekrefter : trykk, strekk, skjærkrefter.

Spenning (mekanisk) : $\vec{F}/A$



Skjærkraft :

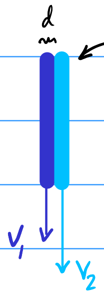


Skjærkraft = $\vec{F}$

Skjærspenning = $\frac{\vec{F}}{A}$ (måles i $Pa = \frac{N}{m^2}$)

Viskositet

- mål på et stoffs (som regel væske) motstand mot relativ bevegelse



to lag av stoffet, relativ hastighet $v = v_2 - v_1$ (skjærhastighet), tykkelse d

Hastighetgradient : $\frac{v}{d}$

Newtons viskositetslov: skjærspenning = μ hastighetsgradient

$$\left(\frac{F}{A}\right) = \mu \left(\frac{v}{d}\right)$$

viskositet

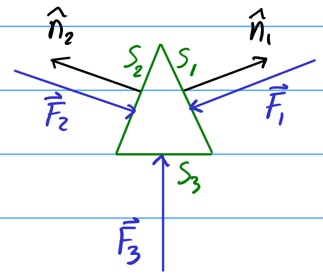
Når er trykket isotropt?

likt i alle retninger

Anta at det ikke fins skjærkrefter (viskositet = 0).
Ønsker å vise at trykket er det samme i to vilkårlige retninger $\hat{n}_1$ og $\hat{n}_2$:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{vol} = m\vec{a}$$

$\vec{F}_1 = p_1 S_1 (-\hat{n}_1)$, $\quad \vec{F}_{vol} = m\vec{g}$, $\quad m = \rho\, dV$



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_{vol}$$

Krymp alle dimensjoner (lengder) med en faktor λ: $\quad S_i \mapsto \lambda^2 S_i$

$$dV \mapsto \lambda^3 dV$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \lambda^3 (m\vec{a} - \vec{F}_{vol})$$

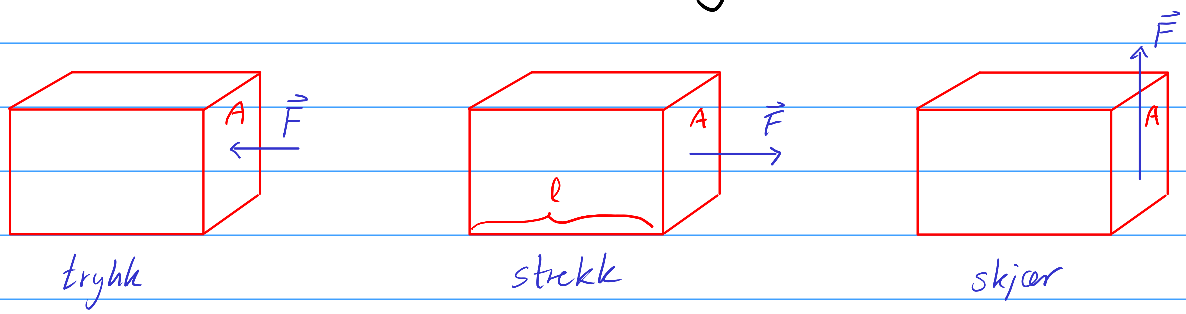
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \lambda (m\vec{a} - \vec{F}_{vol})$$

Gjelder for alle λ, bl.a. $\lambda \to 0$.

Så: $\quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$. $\qquad$ Gir $F_1 = F_2$, og fordi $S_1 = S_2$:

$$\underline{p_1 = p_2}$$

Spesialtilfeller av deformasjon pga spenning



Spenning: (stress)

$\frac{F}{A} = p = \text{trykk}$ $\qquad$ $\frac{F}{A} = \frac{\text{strekk}}{\text{areal}}$ $\qquad$ $\frac{F}{A} = \frac{\text{skjærkraft}}{\text{areal}}$

Deformasjon/tøyning: (strain)

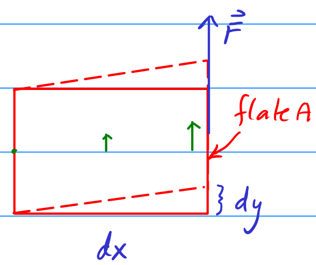
$\frac{dV}{V} = \text{relativ volumendring}$ $\qquad$ $\frac{d\ell}{\ell} = \text{rel. lengdeendring}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = \text{rel. sidevæs tøyning}$

Deformasjon fra spenning:

$dp = -BM \cdot \frac{dV}{V}$ $\qquad$ $\frac{dF}{A} = YM \cdot \frac{d\ell}{\ell}$ $\qquad$ $\frac{F}{A} = SM \cdot \frac{dy}{dx}$

volummodul $\qquad$ Youngs modul $\qquad$ skjærmodul

Elastisitetsmoduler



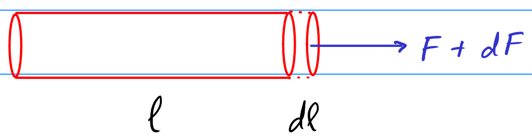
Elastisitetsmodul/Youngs modul relatert til fjærkonstanten:

$$dF = A \cdot YM \cdot \frac{d\ell}{\ell} = \left(\frac{A\ YM}{\ell}\right) d\ell$$

dvs. $dF = k\ dx$ $\quad$ (eller $F = kx$)

der $dx = d\ell$

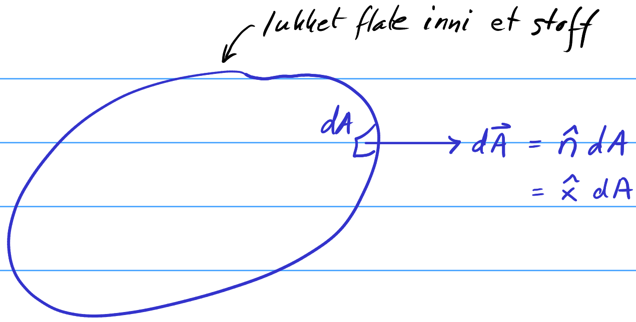
$k = \frac{A \cdot YM}{\ell}$

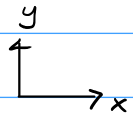


Spenningstensoren

$$F_i(d\vec{A}) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, dA_j$$

funksjon av $d\vec{A}$





$$\vec{F}(d\vec{A}) = \Sigma\, d\vec{A}$$

spenningstensoren (ikke et summetegn...) : $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

(Generaliserer $F = pA$.)

Kraft på arealelement $d\vec{A} = dA\,\hat{x}$:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_{11}\, dA + \sigma_{12}\cdot 0 + \sigma_{13}\cdot 0 \\ &= \sigma_{11}\, dA \qquad \text{(x-komp.)} \\ F_2 &= \sigma_{21}\, dA \qquad \text{(y-komp., skjærkraft)} \\ F_3 &= \sigma_{31}\, dA \qquad \text{(z-komp., skjærkraft)} \end{aligned}$$

Dvs.: $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

skjærspenninger, gir skjærkrefter

minus "trykk" i hhv. x, y, og z-retning, gir normalkomponenten av kraften

Eks: Spenningstensor i et statisk fluid.

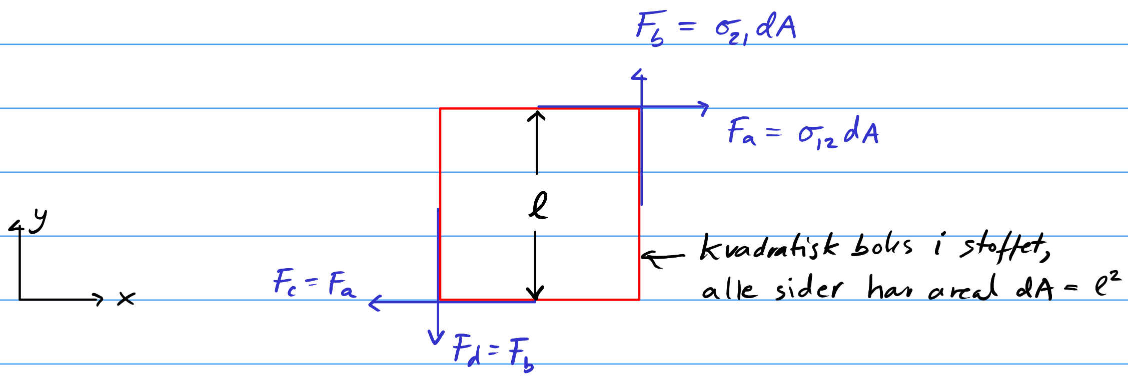
Skjærspenning $= \mu \cdot$ hastighetsgradient,

μ: viskositet

så ingen skjærkrefter i et statisk fluid (eller hvis μ er neglisjerbar).
Siden trykket da er isotropt, får vi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -p & & 0 \\ & -p & \\ 0 & & -p \end{bmatrix} = -p\,\mathbb{1}$$

Spenningstensoren er symmetrisk



Kraftmoment: $\underbrace{\tau_3}_{z\text{-komponenten}} = F_b \frac{\ell}{2} - F_a \frac{\ell}{2} + F_b \frac{\ell}{2} - F_a \frac{\ell}{2}$

$$= F_b \ell - F_a \ell = (\sigma_{21} - \sigma_{12})\,\ell\, dA = (\sigma_{21} - \sigma_{12})\,\ell^3$$

Vi har $\frac{dL_3}{dt} = \tau_3$.

Reduser ℓ med en faktor λ: $\ell \mapsto \lambda \ell$, $\lambda < 1$.

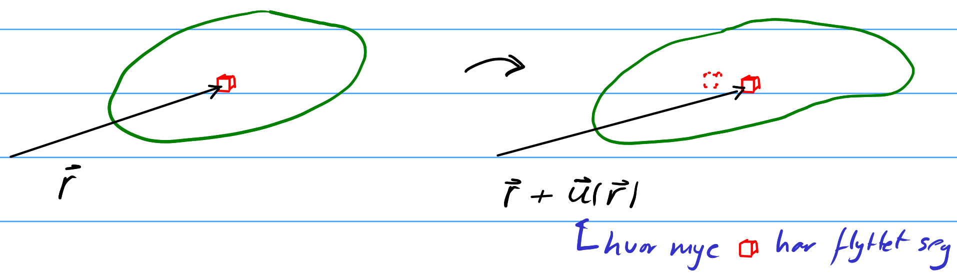
$\tau_3 \mapsto \lambda^3 \tau_3$

$L_3 \mapsto \lambda^5 L_3$ (fordi $\vec{L} = \sum_\alpha \underset{\lambda \vec{r}_\alpha}{\vec{r}_\alpha} \times \underset{\lambda^3 m_\alpha}{m_\alpha} \underset{\lambda \vec{v}_\alpha}{\vec{v}_\alpha}$)

La $\lambda \to 0$. Gir $\tau_3 = 0$, dvs $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

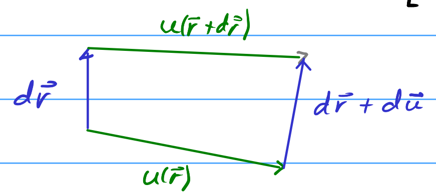
Tilsvarende $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ og $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, så $\underline{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$.

Tøyningstensor (deformasjonstensor)

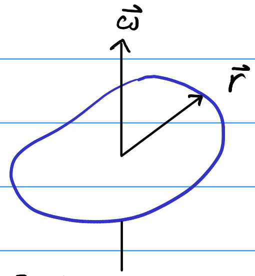


Avstand mellom to nabopunkter $d\vec{r} \mapsto d\vec{r} + d\vec{u}$, $du_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} dr_j$,
dvs:

$$d\vec{u} = D\, d\vec{r}, \qquad D = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial r_1 & \partial u_1/\partial r_2 & \partial u_1/\partial r_3 \\ \partial u_2/\partial r_1 & \partial u_2/\partial r_2 & \partial u_2/\partial r_3 \\ \partial u_3/\partial r_1 & \partial u_3/\partial r_2 & \partial u_3/\partial r_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} r_1 = x \\ r_2 = y \\ r_3 = z \end{matrix}$$



D er ikke en god kandidat til å beskrive deformasjon, fordi den ikke er null for en ren rotasjon:



Punktet $\vec{r}$ har hastigheten $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,
så ila tiden t har det flyttet seg

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{v}t = \vec{\omega}t \times \vec{r} = \vec{\theta} \times \vec{r}, \qquad \vec{\theta} = \vec{\omega}t$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 z - \theta_3 y \\ \theta_3 x - \theta_1 z \\ \theta_1 y - \theta_2 x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow d\vec{u} = D\, d\vec{r}$$

Ser at for en rotasjon, er D en vilkårlig, antisymmetrisk matrise.
Den antisymmetriske delen av D må derfor subtraheres bort.
Def. deformasjonstensor / tøyningstensor / strain tensor:

$$\boxed{E = \underbrace{\tfrac{1}{2}(D + D^T)}_{\text{symmetrisk del av } D}}$$

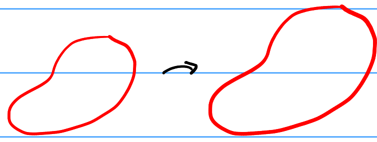
transponert

$$D = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial r_1 & \partial u_1/\partial r_2 & \partial u_1/\partial r_3 \\ \partial u_2/\partial r_1 & \partial u_2/\partial r_2 & \partial u_2/\partial r_3 \\ \partial u_3/\partial r_1 & \partial u_3/\partial r_2 & \partial u_3/\partial r_3 \end{bmatrix}$$

Eks: $E = e\mathbb{1}$. Beskriv deformasjonen med ord. (Anta ingen rotasjon, så $E = D$.)

$d\vec{r} \mapsto d\vec{r} + d\vec{u}$, $\quad d\vec{u} = E\,d\vec{r} = e\,d\vec{r}$

$d\vec{r} \mapsto d\vec{r} + e\,d\vec{r} = (1+e)\,d\vec{r}$



Alle avstander er fortsatt i samme retning, men har økt med en faktor $(1+e)$.

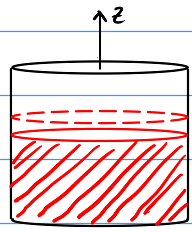
Bolledeig som hever (likt i alle retninger).

volumendring

Volum $V \mapsto (1+e)^3 V = (1+3e)V \Rightarrow \dfrac{\partial V}{V} = 3e$

[$e \ll 1$: $(1+e)^3 \approx 1 + 3e$

Eks: En deig hever bare i z-retn.



Hva er E?

dr_1 og dr_2 uendret, mens $dr_3 \mapsto dr_3(1+e) = dr_3 + e\,dr_3$.

Dvs.: $d\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e\,dr_3 \end{pmatrix}$. Dette kan skrives $d\vec{u} = E\,d\vec{r}$, med

$$E = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & e \end{bmatrix}$$

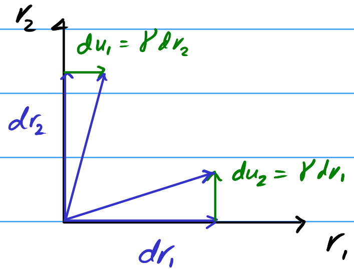
Eks: Skjærdeformasjon $E = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Hva med $E = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$??

Antar ingen rotasjon, så $E = D$. Får da $\dfrac{\partial u_1}{\partial r_2} = \gamma = \dfrac{\partial u_2}{\partial r_1}$.

$du_1 = \gamma\,dr_2$

$du_2 = \gamma\,dr_1$



Generelt: $E = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$

skjær-deformasjoner

strekk-elementer

Dekomponering av en generell deformeringstensor

Gjennomsnittlig strekk: $e = \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} E$

Sporet av en matrise = summen av diagonalelementene

ren utviding

$E = e\mathbb{1} + E'$

resten

Relasjon mellom spenning og deformasjon (Hookes lov)

Lineær og isotrop sammenheng: $\Sigma = \alpha e \mathbb{1} + \beta E'$, der $E = e\mathbb{1} + E'$

α og β er konstanter som karakteriserer materialet.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Sigma = (\alpha - \beta) e \mathbb{1} + \beta E}$$

Invers sammenheng: $\operatorname{tr}\Sigma = 3\alpha e \Rightarrow e = \frac{\operatorname{tr}\Sigma}{3\alpha}$

$$\Sigma = \frac{(\alpha-\beta)}{3\alpha} \operatorname{tr}\Sigma \cdot \mathbb{1} + \beta E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{3\alpha\beta}\left[3\alpha\Sigma - (\alpha-\beta)\operatorname{tr}\Sigma \cdot \mathbb{1}\right]}$$

Eks: Et isotropt stoff utsettes for et isotropt trykk: $\Sigma = -p\mathbb{1}$.
Hva blir deformasjonen?

$$E = \frac{1}{3\alpha\beta}\left[-3\alpha p - (\alpha-\beta)(-3p)\right]\mathbb{1} = \underline{\frac{-p}{\alpha}\mathbb{1}} = e\mathbb{1},$$

med $e = -p/\alpha$.

Fra tidligere: $\frac{dV}{V} = 3e = -\frac{3p}{\alpha}$, og $p = -BM \cdot \frac{dV}{V}$,

dvs.: $\underline{\alpha = 3BM}$. BM = volum-modulen

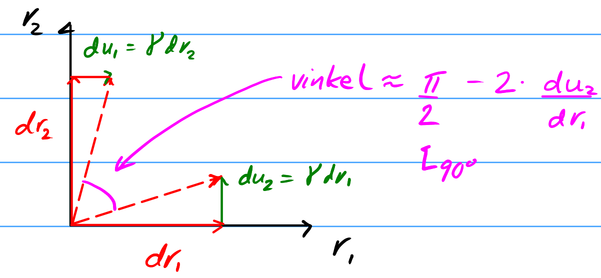
Eks: Skjærdeformasjon $E = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Finn sammenheng mellom β og SM.

E symmetrisk, dvs. $D = E$.

$d\vec{u} = E\,d\vec{r}$

$du_1 = \gamma\, dr_2$

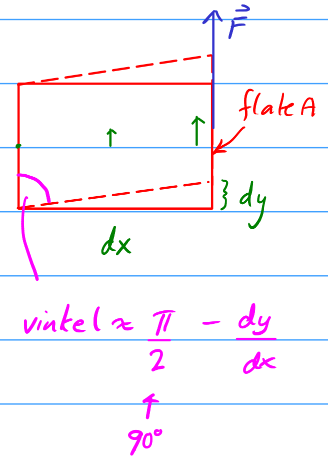
$du_2 = \gamma\, dr_1$



Hookes lov:

$$e = \frac{1}{3}\operatorname{tr} E = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \beta E, \quad \sigma_{12} = \beta\gamma = \sigma_{21}$$

Fra før:
$$\frac{F}{A} = SM \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$= SM \cdot 2\frac{du_2}{dr_1}$$
$$= SM \cdot 2\gamma$$



$\sigma_{21} = \beta\gamma$ og $\sigma_{21} = SM \cdot 2\gamma$

$\Rightarrow \quad \underline{\beta = 2SM}$

Eks: Strekk. Øvingsoppgave. Sammenheng: $YM = \dfrac{3\alpha\beta}{2\alpha + \beta} = \dfrac{9BM \cdot SM}{3BM + SM}$

YM, SM og BM er altså ikke uavhengige.