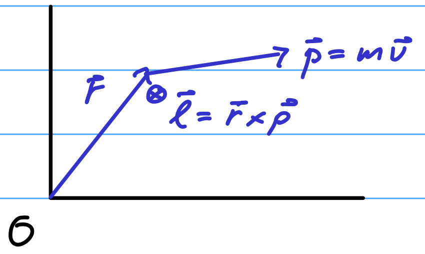
Statikk : I ro

$\sum \vec{F}^{ext} = 0$.  Opplagt? Fordi $\sum$ interne krefter $= 0$ pga Newtons 3. lov.

$\sum \underbrace{\vec{T}}_{\text{kraftmoment}}{}^{ext} = 0$ (T s. 90–)

Hvorfor? Først litt dynamikk...:

Se på enkelt partikkel, spinn $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$.



$$\dot{\vec{\ell}} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

fordi $\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0$

$$\dot{\vec{\ell}} = \vec{r} \times \underbrace{\vec{F}}_{\sum \vec{F}} \equiv \vec{T}$$

Mange partikler: $\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{\ell}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha$$

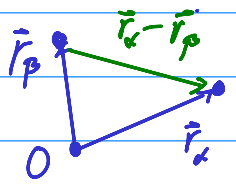
Kraft på partikkel α: $\vec{F}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \underbrace{\vec{F}_{\alpha\beta}}_{\text{kraft på p. }\alpha\text{ fra p. }\beta} + \vec{F}_\alpha^{ext}$

$$\dot{\vec{L}} = \underbrace{\sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta}} + \underbrace{\sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ext}}_{\sum \vec{T}^{ext}}$$

$$\sum_{\alpha,\beta \text{ bortsett fra } \alpha=\beta} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}_{\alpha\beta}$$

$$= 0$$



Hvor mange ledd er det i dobbeltsummen hvis det er N partikler?

Så $\underline{\dot{\vec{L}} = \vec{T}^{ext}}$

Noen nyttige forenklinger

- Når $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ spiller ikke valg av omdreiningspunkt/origo noen rolle:

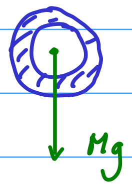
$$\vec{\tau}^{ext}_{om\,\vec{a}} = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha + \vec{a}) \times \vec{F}^{ext}_\alpha$$

skifter origo med $\vec{a}$

$$= \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}^{ext}_\alpha + \vec{a} \times \sum_\alpha \vec{F}^{ext}_\alpha$$

$$= \vec{\tau}^{ext} + \cancel{\vec{a} \times 0}$$

- Vi kan tenke på tyngdekraften som <u>en</u> kraft som angriper massesenteret:



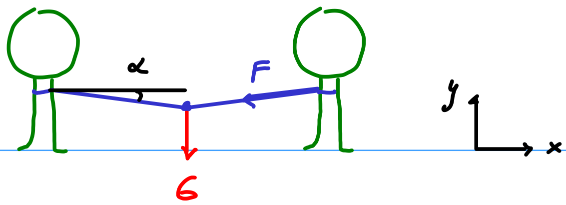
Fordi:
Deler opp legemet i små biter med masse m_α.

Massesenter $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$, $M = \sum_\alpha m_\alpha$

$$\vec{\tau}^{ext} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times (-m_\alpha g \hat{z}) = \underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \right)}_{M\vec{R}} \times (-g\hat{z})$$

$$= \underbrace{\vec{R}}_{\text{massesenter}} \times \underbrace{(-Mg\hat{z})}_{\text{tyngden til hele legemet}}$$

Eks: Finn F.



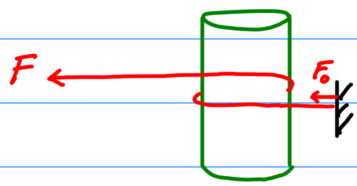
Kraft på knute i y-retning:

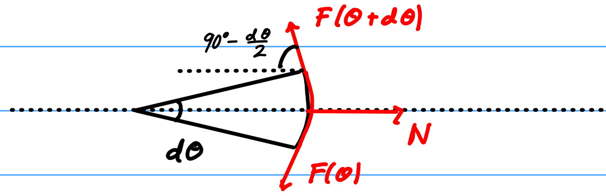
$$F\sin\alpha + F\sin\alpha - G = 0$$

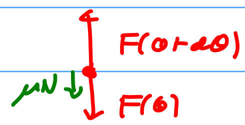
$$2F\sin\alpha = G$$

$$\underline{F = \frac{G}{2\sin\alpha}}$$

Eks:







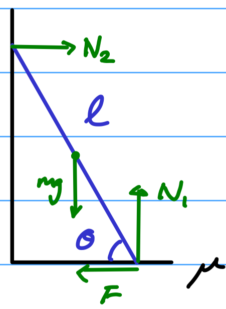
$$N = 2F\cos\left(90° - \frac{d\theta}{2}\right) = 2F\sin\frac{d\theta}{2} \approx 2F\frac{d\theta}{2} = F\,d\theta$$

$$F(\theta + d\theta) - F(\theta) = \mu N = \mu F(\theta)\,d\theta$$

$$F'(\theta) = \mu F(\theta)$$

$$\underline{F(\theta) = F_0 e^{\mu\theta}}$$

Eks: Stige inntil friksjonsfri vegg.
Finn minste vinkel θ før stigen sklir.



$$\Sigma F_x = N_2 - F = 0 \quad \Rightarrow N_2 = F$$

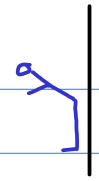
$$\Sigma F_y = N_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow N_1 = mg$$

$$\Sigma \tau = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - N_2\ell\sin\theta = 0$$

$$N_2 = \frac{mg}{2\tan\theta} = F$$

Må ha $F < \mu N_1 = \mu mg \Rightarrow \frac{1}{2\tan\theta} < \mu \Rightarrow \underline{\tan\theta > \frac{1}{2\mu}}$

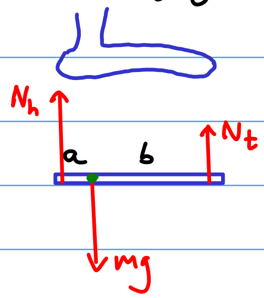
Spørsmål: Stå inntil veggen og prøv å plukke opp noe på gulvet foran deg. Hvorfor får du det ikke til?



Eks: Foten som vektstang

Du står på en fot. Tegn kreftene som virker på foten.
Anta masseløs fot, mens kroppen har tyngden mg.

Finn N_h og N_t.
Anta mg, a, b kjent.



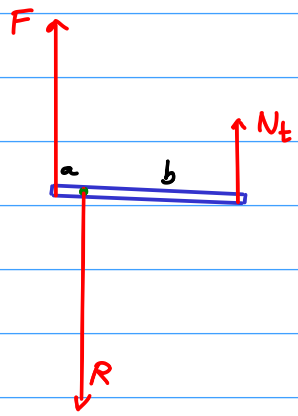
$b = 16\,cm$
$a = 4\,cm$

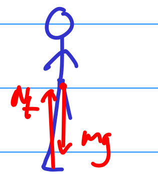
$$\Sigma F = N_h + N_t - mg = 0$$
$$N_h + N_t = mg$$

$$\Sigma \tau = N_t b - N_h a = 0$$
$$N_h a = N_t b$$
$$N_h = N_t \frac{b}{a}$$

$$\underbrace{N_t \frac{b}{a}}_{N_h} + N_t = mg$$
$$N_t \left(\frac{b}{a} + 1\right) = mg$$
$$N_t \cdot 5 = mg$$
$$\underline{N_t = \frac{1}{5} mg} \qquad \underline{N_h = \frac{4}{5} mg}$$

På tå:





$N_t = mg$

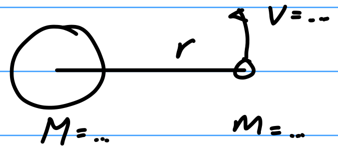
$$\Sigma \tau = N_t b - F a = 0$$
$$F = N_t \frac{b}{a} = \underline{4mg}$$

$$\Sigma F = F + N_t - R = 0$$
$$\Rightarrow R = F + N_t = 4mg + mg = \underline{5mg}$$

Problemløsing

1. Tegn figur. God figur for geometri.

2. Løs analytisk så langt det er mulig.
   F.eks.:



Sirkelbane.

- raskere
- tryggere (mindre sjanse for feil)
- trenger ikke gjenta om annen verdi
- du ser hvordan svarer avhenger av ...
- du kan sjekke enheter og spesialtilfeller

Finn r.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\gamma m M}{r^2} \Rightarrow r = \frac{\gamma M}{v^2} = \dots$$

3. Kalkulator eller numerisk først når det trengs.
   Sjekk om størrelsesorden er rimelig.

4. Dimensjonsanalyse!

Eks: Kinetisk energi (relativistisk): $T = (\gamma v - 1) m c^2$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

må være feil

Eks: $\vec{F} = \frac{mv}{b}$, $b = 3m$

feil dim. + manglende enhetsvektor

Eks: $x(t) = A e^{-gt}$, $g = 9.8\ m/s^2$

5. Sjekk spesialtilfeller / grensetilfeller! (Bruk fantasi...)

$$T = (\gamma - 1) m c^2$$

$v = 0$: $T = 0$

$\frac{v^2}{c^2} \ll 1$: $T = \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] mc^2$

$$\approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} mc^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$(1+u)^a \approx 1 + au$, $u \ll 1$