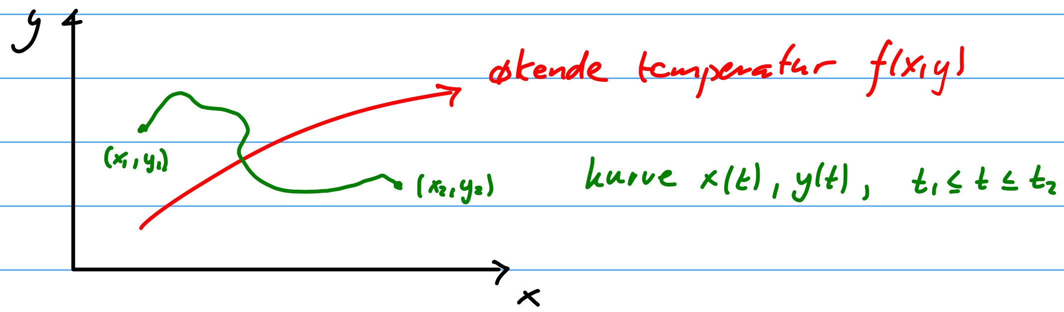
Forstå partiellderivert og kjerneregelen i flere dimensjoner

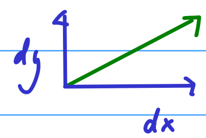


En temperatursensor flyr langs grønn kurve, tid t_1 til t_2.
Hva måler den s.f.a. tiden t?

$$T(t) = f(x(t), y(t))$$

Hvordan endrer $T(t)$ seg med tiden?

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$



temp.endring pga bevegelse i x-retn.

temp.endring pga bevegelse i y-retn.

Hva hvis temperaturen også avhenger av t for et fast punkt?
$f(x,y,t)$

La fortsatt $x = x(t)$ og $y = y(t)$. Da har vi

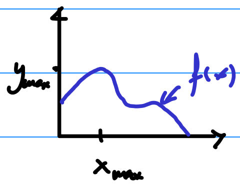
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

(Merk at $\frac{df}{dt} \neq \frac{\partial f}{\partial t}$.)

Variasjonsregning (T. kap. 6)

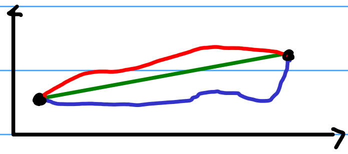
Hvorfor? For å utvikle alternativ formulering av Newtons lover, Lagrange og Hamilton:
Mye mer praktiske når føringer, grunnlag for klassisk og kvantefeltteori, grunnlag for kv. mek.

Finn topp-punktet:



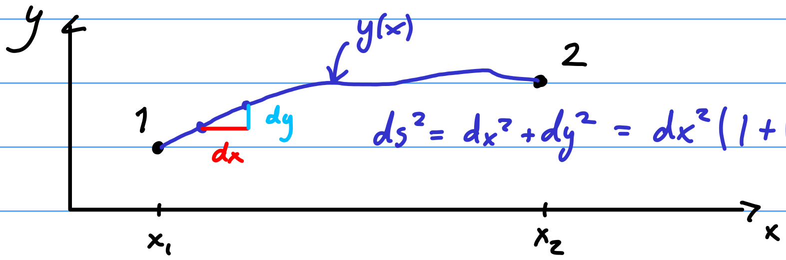
Finn (x_{max}, y_{max})

Finn beste funksjon:



Finn korteste vei mellom to punkter

Eks: Finn korteste vei mellom to punkter.



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Lengden av blå kurve:

$$S = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)}\, dx$$

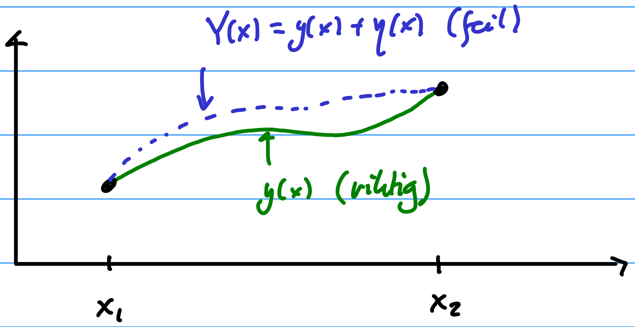
Trenger en metode for å finne minimum S.

Løsning: Euler-Lagrange-ligningen

Problem:

Finn $y(x)$ slik at $S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]\,dx$ er minimum

(evt maksimum, evt stasjonær). Her er $y(x_1)$ og $y(x_2)$ faste.



Må ha $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$.

Vendelig mange muligheter for $\eta(x)$. Bruk $\alpha\,\eta(x)$ i stedet:

$$Y(x) = y(x) + \alpha\,\eta(x)$$

$$\text{Ser på } S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x)\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta,\ y' + \alpha\eta',\ x)\,dx$$

Krever $\dfrac{dS}{d\alpha} = 0$ for $\alpha = 0$,

som vi må ha hvis $Y(x) = y(x)$ skal gi minimum.

Kjerneregelen: La $Y = Y(\alpha)$ og $Y' = Y'(\alpha)$

Da er $\dfrac{d\,f(Y,Y')}{d\alpha} = \dfrac{\partial f}{\partial Y}\dfrac{dY}{d\alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial Y'}\dfrac{dY'}{d\alpha}$

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\cdot\eta + \frac{\partial f}{\partial Y'}\cdot\eta' \right) dx$$

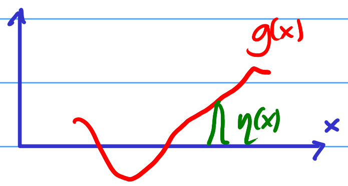
$$\left[\frac{\partial f(Y,Y')}{\partial Y} = \frac{\partial f(Y,Y')}{\partial y}\frac{dy}{dY} = \frac{\partial f(Y,Y')}{\partial y} \underset{\alpha=0}{=} \frac{\partial f(y,y')}{\partial y} \right]$$

$$\left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' \right) dx = 0 \quad \text{for alle } \eta(x) \text{ s.a. } \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Delvis integrasjon: $\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \, dx = \underbrace{\left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$$

Gir $\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)}_{g(x)} \eta(x) \, dx = 0$ for alle $\eta(x)$. $(*)$



Anta $g(x) \neq 0$ et sted, og g kontinuerlig. Velg da $\eta(x)$ så den plukker ut et område med samme fortegn for $g(x)$. Motsier $(*)$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \text{(Euler-Lagrange-lign.)}}$$

Eks: Finn kortest vei mellom $(x_1, y(x_1))$ og $(x_2, y(x_2))$, forts.:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx . \qquad f(y, y', x) = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \, , \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

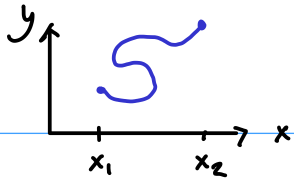
E.L.: $\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.} = C$

$$\Rightarrow \quad y'^2 = C^2 (1 + y'^2) \quad \Rightarrow \quad y'^2 (1 - C^2) = C^2$$

$$\Rightarrow \quad y' = \text{konstant} = a \quad \Rightarrow \quad y(x) = ax + b \text{, rett linje.}$$

Strengt tatt: Har bare funnet ut at en rett linje er kortest av alle kurver på formen $y = y(x)$.

Hva med



$x = x(t)$, $y = y(t)$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

Mer generelt:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f[x, y, \dot{x}, \dot{y}, t]\, dt$$

Vi ønsker å finne kurven $x = x(t)$ og $y = y(t)$,
med $x(t_1)$, $y(t_1)$, $x(t_2)$, $y(t_2)$ faste,
slik at S er stasjonær.

Løsning: La $x(t)$, $y(t)$ være rett løsning, og se på en gal løsning
$$x = x(t) + \alpha\xi(t)$$
$$y = y(t) + \beta\eta(t)$$

Legg merke til at vi bruker ikke her at x, y er kartesiske koordinater. Kunne vært andre koordinater.

Må ha $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$ og $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$ for $\alpha = 0 = \beta$.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{\xi} \right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{\xi}\, dt = \cancel{\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\xi\right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\xi\, dt$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\xi\, dt \qquad \text{for alle } \xi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \quad \text{tilsvarende: } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0$$

Eks: Kortest vei mellom to punkter - igjen.

$$f(x,\dot{x},y,\dot{y},t) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} .$$

E.-L. gir at $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = C_1$ og $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = C_2$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}}{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}} = \frac{\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}}{\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y = ax + b}$$