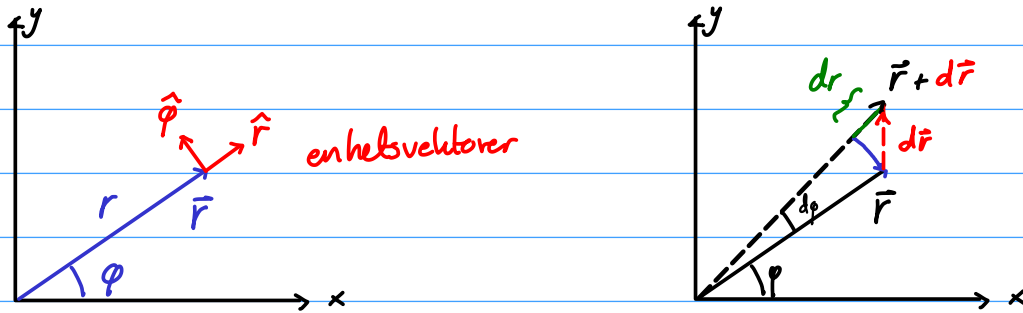


Koordinatsystemer

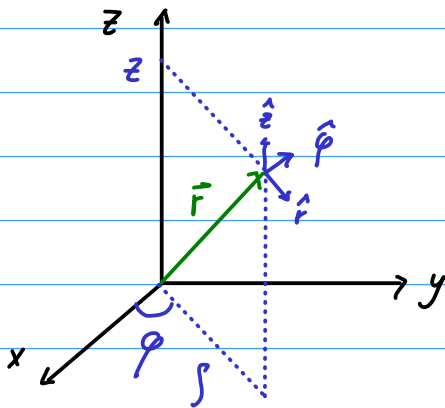
Polare koordinater:



Vi ser at: $d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\phi\hat{\phi}$ og $|d\vec{r}| = \sqrt{dr^2 + (r d\phi)^2}$

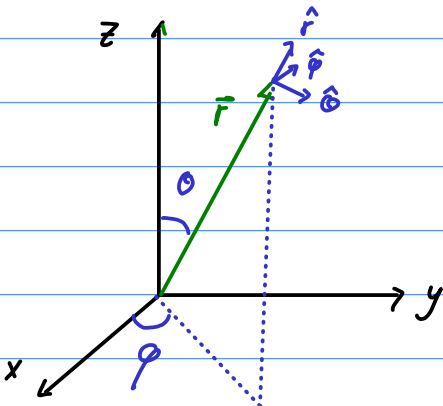
$$|\vec{v}| = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2}}{dt}, \quad |\vec{v}|^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2 d\phi^2}{dt^2} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$$

Sylinderkoordinater:



$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \\ d\vec{r} &= d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \\ |d\vec{r}| &= \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2}\end{aligned}$$

Sfæriske koordinater / kulekoordinater:



$$\vec{r} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

$$\begin{aligned}ds \equiv |d\vec{r}| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr\right)^2} \\ &= \dots \\ &= \sqrt{r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + dr^2}\end{aligned}$$

Lagrange - mekanikk (T. kap 7)

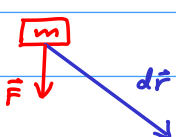
Vi ser først på en partikkel med kin.energi $T = \frac{1}{2}mv^2$
og potensiell energi $U = U(\vec{r})$. $= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Def. Lagrangefunksjonen $L = T - U$.

Har $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$$

Arbeid $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$
 $= -dU$
 $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$
 $\vec{F} = -\nabla U$



Newtons 2. lov: $F_x = \dot{p}_x$

(*) $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ Tilsvarende: $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$.

Men dette er jo Euler-Lagrange-ligningene!

Dvs:

$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ er stasjonær for veien $\vec{r} = \vec{r}(t)$
partikkelen tar fra t_1 til t_2 .

Hamiltons prinsipp

S kalles virkning.

Vi har altså vist: Veien partikkelen tar er gitt av Newton $\vec{F} = m\vec{a}$



Veien gitt av de tre Lagrange-ligningene (*)



Veien gitt av Hamiltons prinsipp

Generaliserte koordinater

Vi kan bruke kartesiske koord. (x, y, z) , sfæriske (r, θ, φ) , osv.

Generelt (q_1, q_2, q_3) , der $q_i = q_i(\vec{r})$ og $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$.

Dvs. for hver $\vec{r} = (x, y, z)$ fins en entydig (q_1, q_2, q_3) , og omvendt.

Skriver om til å bruke q_i :
$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(\vec{r})$$
$$= L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

Virksomheten $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ er den samme som før.

S stasjoner for riktig vei fortsatt.

Euler - Lagrange :
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad \text{for } i = 1, 2, 3.$$

Viktig resultat! Viser at Lagrange-ligningene gjelder uansett valg av koordinater!

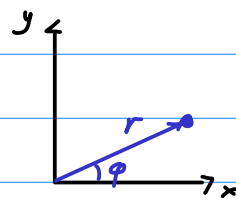
Vi kaller $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ = komponent i av generalisert kraft

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ = ————— " ————— driv ("bevegelsesmengde")

Da blir Lagrange' ligninger "generaliserte Newtons 2. lover".

Eks: En partikkel i 2D, polare koordinater

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r, \varphi) \end{aligned}$$



Lagrange:

$$r: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}$$

$$\underbrace{m r \dot{\varphi}^2}_{\frac{m(r\dot{\varphi})^2}{r}} - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial r}}_{F_r} = \frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m \ddot{r}$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Fra ukkesoppg.:

$$\nabla U(r, \varphi) = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

$$\varphi: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi})$$

$$\text{Har } \vec{F} = -\nabla U, \text{ s\aa } F_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$\text{S\aa } r F_\varphi = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) \Rightarrow \tau = \frac{dL}{dt}$$

↑
kraftmoment
om origo
 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

↑
spinn $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$L = r p_\varphi = r m v_\varphi = r m r \dot{\varphi} = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\tau = r F_\varphi$$

"Generalisert kraft" i φ -retning: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = r F_\varphi = \tau = \text{kraftmoment}$

"Generalisert driv" i φ -retning: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = L = \text{spinn}$

Lagrange-mekanikk N partikler

Ser på to: $L = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

Newtons 2. lov: $F_{1x} = \dot{p}_{1x}, \dots$ (y- og z-komp.)

$$F_{2x} = \dot{p}_{2x}, \dots$$



$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}, \dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}, \dots$$



$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \text{ er stasjonært}$$



$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \right)$$

vilkårlige
koordinater

De store fordelene med Lagrange-mekanikk:

1) Kan bruke hvilke som helst koordinater.

2) Funger også når vi har føring.

(Og vi kan glemme krefter fra føringene). Bevises seinere.

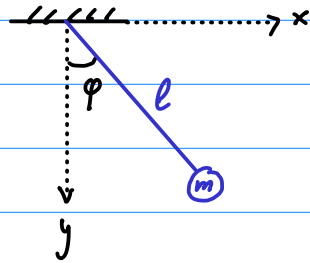
(3) Se sammenhengen mellom symmetrier og konserveringslover (Noethers teorem.)

Føringar

Eks føring: Pendel

$$\vec{r} = (x, y) = (l \sin \varphi, l \cos \varphi)$$

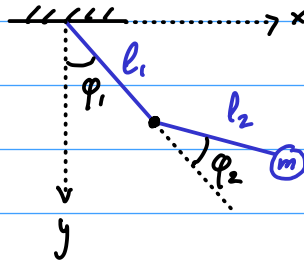
$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(l - y) \\ &= \frac{1}{2} m ((l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (-l \sin \varphi \dot{\varphi})^2) \\ &\quad - mg(l - l \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Lagrange: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \Rightarrow -mgl \sin \varphi = \frac{d}{dt} m l^2 \dot{\varphi} = m l^2 \ddot{\varphi} \\ &\Rightarrow \underline{-g \sin \varphi = l \ddot{\varphi}} \end{aligned}$$

Eks: Dobbelpendel

Bruke φ_1 og φ_2 som koordinater.



Generaliserte koordinater for et system med føringar

q_1, q_2, \dots, q_n gen. koord. hvis alle N partikler sine posisjoner \vec{r}_α kan finnes fra q_1, \dots, q_n (og tiden t):

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t), \quad \alpha = 1, \dots, N$$

$$\text{og motsatt: } q_i = q_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t), \quad i = 1, \dots, n$$

gitt føringene. Antar holonome føringar.

Holonome føringar: Antall generaliserte koordinater = antall frihetsgrader
F.eks.: pendel, kule i kulebane, ...

Ikke-holonome føringar: F.eks.: gummiball på gulret (trenger flere gen. koord. enn de to frihetsgradene).

Bervis av Lagranges lign. med føring

Spesialtilfelle: en partikkel som føres langs en flate

To typer krefter: 1) ^{holonome} føringkrefter: avhengig av andre krefter og tilstand til syst.
2) andre krefter, f.eks gravitasjon, til sammen \vec{F} .
Antar $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}, t)$ (tillater $U(\vec{r}, t)$ tidsavh.)

Def.: $L = T - U$.

↑ pot.energi for kreftene som ikke har med føring å gjøre

La $\vec{r}(t)$ være riktig løsning for banen.

La $\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \vec{\epsilon}(t)$

↑ virtuell forskyvn. som er konsistent med føringene,
og med $\vec{\epsilon}(t_1) = 0 = \vec{\epsilon}(t_2)$

Virkning $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t) dt$, $S_0 = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dt$

$$0 = \delta S = S - S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{[L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)]}_{\delta L} dt$$

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{1}{2} m [(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\epsilon}})^2 - \dot{\vec{r}}^2] - [U(\vec{r} + \vec{\epsilon}, t) - U(\vec{r}, t)] \\ &= m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\epsilon}} - \vec{\epsilon} \cdot \nabla U + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{\epsilon} \cdot [m \ddot{\vec{r}} + \nabla U] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{F}_{\text{f\u00f8ring}} dt = 0$$

↑ delvis integrasjon p\u00e5 $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\epsilon}}$ -leddet ↓ \vec{F}_{tot} ↓ $-\vec{F}$

$\int = 0$ fordi $\vec{\epsilon} \perp \vec{F}_{\text{f\u00f8ring}}$
Mer generelt:

Fordi føringkreftene til sammen ikke utf\u00f8rer arbeid under virtuell forskyvn. $\vec{\epsilon}$.

(Def. av føringkrefter.)

Går nå over til generaliserte koord. q_i som respekterer føringene.

Da er $\bar{e}(t)$ en vilkårlig endring i banen beskrevet av q_i .

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Eks: Atwood-maskin

$$x + y = \text{konst.}$$

$$\dot{x} = -\dot{y}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 \\ = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2$$

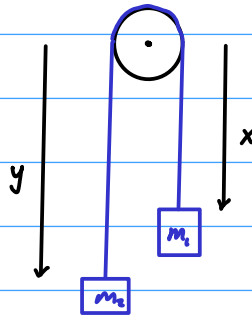
$$U = -m_1 g x - m_2 g y \\ = -(m_1 - m_2) g x + \text{konst.}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_2 - m_1) g x$$

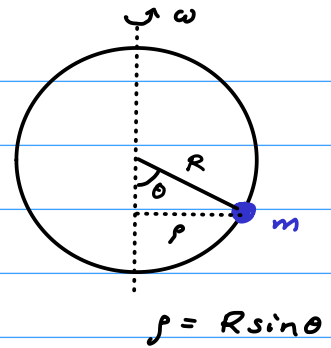
$$\text{Beregneslign.: } \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow (m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2) \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{(m_2 - m_1) g}{(m_1 + m_2)}$$

Trengte ikke bry oss med snorkrafta / føringen.



Eks: Perle på spinnende trådbøyle



Hastighetskomponenter: $R\dot{\theta}$ langs bøyle
 $\rho\omega$ inn i papiret

$$T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \omega^2 R^2 \sin^2 \theta)$$

$$U = mgR(1 - \cos \theta), \text{ ref. i bunn av bøyle.}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR(1 - \cos \theta)$$

Generalisert koord.: θ .

Bevægelselign.:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow m R^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta = m R^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta, \text{ må generelt løses numerisk.}$$

$$\text{Likevektspunkter: } \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 0, \theta = \pi, \text{ eller } \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Stabile?

↑
bare når $\omega^2 > g/R$

- I nærheten av $\theta = 0$ har vi $\ddot{\theta} \approx \text{neg. tall} \cdot \theta$ for $\omega^2 < \frac{g}{R}$: stabilt
 $\ddot{\theta} \approx \text{pos. tall} \cdot \theta$ for $\omega^2 > \frac{g}{R}$: ustabilt
- $\theta = \pi$: alltid ustabilt
- Likevektspkt. $\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}$ eksisterer bare når $\omega^2 > \frac{g}{R}$.
 $\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta$: stabilt [autn $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, da er $\sin \theta > 0$ og $\cos \theta$ økende]

