Universitetet i Oslo

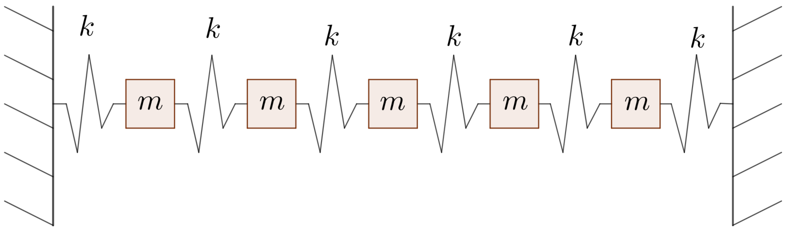
FYS1105 — Klassisk mekanikk

Ekstraoppgaver

Oppgave 1 Diskusjonsoppgaver koblede svingninger/driv

a) Figur 1 viser et system med fem like masser m, plassert på rekke mellom to vegger. Mellom hver masse, og mellom de ytterste massene og veggene, er det en fjær. Alle fjærene har samme fjærkonstant k. Avstanden mellom veggene og massene er slik at alle fjærene er slappe i likevektsposisjonen til systemet.

Prøv å beskrive, *med ord,* én av normalmodusene til dette systemet.



Figur 1: Et system med fem masser mellom to vegger, skilt av fjærer. Alle massene og fjærkonstantene er like.

Hint: En tilsvarende modus finnes for alle slike systemer med et odde antall masser, altså for 3,5,7,... slike masser på rekke.

b) En stein med masse m slippes så den faller rett ned mot bakken. Rett før steinen treffer bakken er hastigheten v, målt i forhold til massesenteret til (jorda + steinen). Jorda har masse M. Hva er drivet til steinen? Og til jorda? Hva er den kinetiske energien til steinen og til jorda? Hvilken av disse størrelsene går mot null dersom $m/M \to 0$?

Oppgave 2 Sylinder ned en bakke

a) Et legeme med masse sklir nedover en friksjonsfri bakke med helningsvinkel α. (Legemet sklir bare; det ruller ikke.) Finn akselerasjonen.

b) Legemet er nå en sylinder med konstant massetetthet, radius R, og total masse lik M. Sylinderens akse er horisontal. Sylinderen ruller nedover bakken; den sklir ikke. Finn akselerasjonen. Forklar hvorfor akselerasjonen blir mindre enn det den var i forrige spørsmål.

c) Må man anta noe om friksjonen for at sylinderen kun skal rulle, ikke skli?

d) Sylinderen har nå ikke lenger konstant massetetthet, men vi antar at massetettheten ϱ kun avhenger av avstanden ρ fra sentrum av sylinderen. Finn akselerasjonen i dette tilfellet, uttrykt med treghetsmomentet I_{zz} til sylinderen for rotasjon om sylinderens akse (z-aksen).

NB: Du trenger altså ikke å regne ut I_{zz}; den kan behandles som en konstant i utregningen av akselerasjonen.

e) Sylinderen har nå en massetetthet ϱ som avhenger av både ρ og ϕ (i et sylindrisk koordinatsystem med z-akse langs sylinderaksen). Forklar hvordan du ville regnet ut akselerasjonen hvis sylinderen kun ruller (ikke sklir). Blir det noen forskjell fra forrige deloppgave? Blir akselerasjonen avhengig av tiden?

Oppgave 3 Omkretsen til en sirkel på en unødvendig tungvint måte

a) Regn ut flateintegralet

$$\int_S \frac{1}{r} dS, \tag{1}$$

der S er en sirkel i xy-planet, med sylindriske koordinater.

b) Bruk Stokes' teorem til å vise at dette integralet er lik omkretsen til C, sirkelen som omslutter S:

$$\oint_C dl = \int_S \frac{1}{r} dS. \tag{2}$$

> **Hint:** Linjeelementet til C (med retning) kan skrives $d\mathbf{l} = \hat{\boldsymbol{\phi}} dl = \hat{\boldsymbol{\phi}} R d\phi$. For å bruke Stokes' teorem kan du introdusere et felt $\mathbf{A} = A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$.

Oppgave 4 Overflatearealet til en kule på en unødvendig tungvint måte

a) Regn ut volumintegralet

$$\int_V \frac{2}{r} dV, \tag{3}$$

der V er en kule med radius R og sentrum i origo, med sfæriske koordinater.

b) Bruk divergensteoremet til å vise at dette integralet er lik overflatearealet til S, skallet som omslutter V:

$$\int_V \frac{2}{r} dV = \oint_S dS. \tag{4}$$

Hint: Arealelementet til S, med retning, kan skrives $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}} dS$. For å bruke divergensteoremet kan du introdusere et felt $\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}}$.