Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett 11

Oppgave 1 Tolegemesystemet i Hamilton-mekanikk

Tidligere i kurset har vi sett at et gravitasjonelt vekselvirkende tolegeme-system kan beskrives med Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{Gm_1m_2}{r}, \tag{1}$$

hvor r og ϕ beskriver den relative posisjonsvektoren mellom de to legemene i polare koordinater, og $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$.

a) Finn det generaliserte drivet til de to koordinatene,

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}},$$
$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \equiv \ell,$$

og vis at Hamiltonfunksjonen er gitt ved

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}.$$

b) Utled Hamilton-likningene for systemet.

Oppgave 2 Faseromsdiagrammer

Faseromsdiagrammer kan være praktiske for å få en oversikt over de mulige løsningene til et system. Selv om vi stort sett har sett på slike diagrammer i konteksten av løsninger av Hamiltons likninger — hvor alle krefter er konservative — kan man fortsatt definere tilsvarende generalisert koordinat og driv for systemer med ikke-konservative krefter.

Her ser vi på fire ulike systemer; for hvert system, beskriv med ord de ulike typene bevegelse som beskrives av hvert diagram.

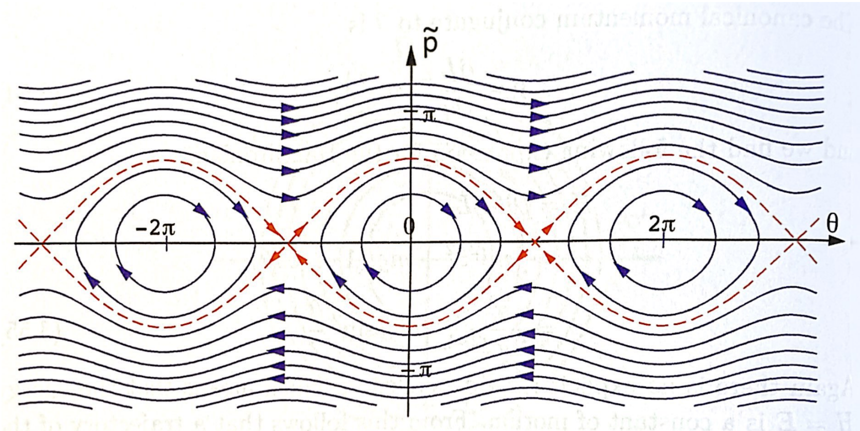
Generelle kommentarer: $\tilde{p}$ og $\tilde{p}_\theta$ er dimensjonsløse, normaliserte versjoner av de generaliserte drivene for hvert system; de røde, stiplede linjene markerer overganger mellom ulike typer bevegelse.

a) Enkel pendel med lengde l (figur 1), $p = ml^2\dot{\theta}$.

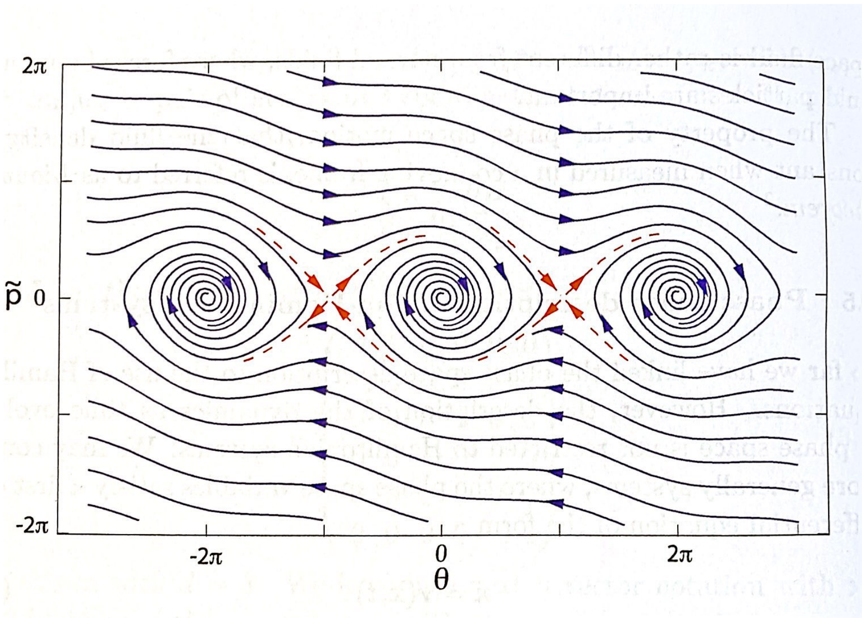
b) Enkel *dempet* pendel med lengde l (figur 2), $p = ml^2\dot{\theta}$.

c) Masse på en roterende ring (se Taylor, eksempel 7.6, 7.7) (figur 3), $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$. Ringen roterer med frekvens $\omega = 1.5\sqrt{g/R}$.

Hint: Les gjennom eksempel 7.6 og 7.7 i Taylor, og vurder hvilke likevektspunkter (stabile og ustabile) som finnes for denne rotasjonsfrekvensen.



Figur 1: Enkel pendel (hentet fra Leinaas, 2019).



Figur 2: Enkel, dempet pendel (hentet fra Leinaas, 2019).

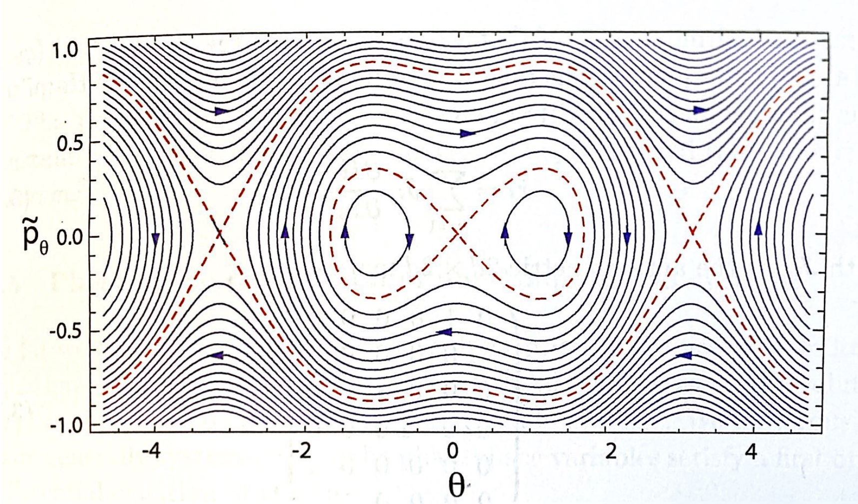
d) (Fra midtveiseksamen FYS3120, 2019)

Tolegemesystemet fra forrige oppgave, bestående av jorda og Den internasjonale romstasjonen (ISS) (figur 4). Figuren viser de mulige banene med $m_1 = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg, $m_2 = 4.197 \cdot 10^5$ kg, og $\ell = 2.20 \cdot 10^{16}$ kg m^2 s^{-1}, for varierende energi.

Merk at disse løsningene er begrenset av at spinnet alltid er likt spinnet til ISS rundt jorda, $\ell = 2.20 \cdot 10^{16}$ kg m^2 s^{-1}. Hvordan tror du de mulige løsningene ville endret seg dersom vi endret ℓ?

Oppgave 3 Areal og volum på unødvendig tungvint vis

a) Vis at integralet av "1" over en sirkel S med radius R (vi ordner koordinatsystemet slik at sentrum av sirkelen er i origo, og sirkelen ligger i



Figur 3: Masse på roterende ring (hentet fra Leinaas, 2019).

xy-planet) er lik arealet til sirkelen,

$$\int_S dS = \pi R^2. \tag{2}$$

Gjør dette på to ulike måter:

i) Ved å regne ut likning (2) direkte.

ii) Ved å vise, ved hjelp av Stokes' teorem, at likning (2) er lik linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \tag{3}$$

der $\mathbf{A} = \frac{r}{2}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ og C er kurven som omslutter S, og deretter regne ut likning (3).

Hint: I begge tilfellene er det enklest å bruke sylinderkoordinater, slik at $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{z}}dS$ og $d\mathbf{l} = R\hat{\boldsymbol{\phi}}d\phi$; relevante formler fins i formelsamlingen på emnesiden.

b) Vis at det tilsvarende integralet over en kule V med sentrum i origo og radius R er lik volumet til kula,

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi R^3, \tag{4}$$

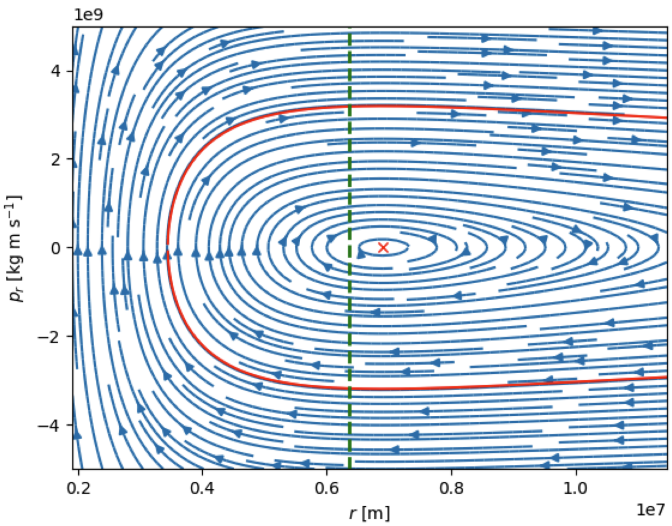
på to ulike måter:

i) Ved å regne ut likning (4) direkte.

ii) Ved å vise, ved hjelp av divergensteoremet, at likning (4) er lik flateintegralet

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \tag{5}$$

der $\mathbf{A} = \frac{r}{3}\hat{\mathbf{r}}$ og S er flaten som omslutter V, og deretter regne ut likning (5).



Figur 4: Faseromsdiagram for jorda og ISS. De blå linjene med piler viser mulige løsninger av bevegelseslikningene; det røde krysset er minimumspunktet for energi; den røde linjen er banen med $E = 0$; og den grønne, stiplede linjen viser radien til jorda.

> **Hint:** Her er det mest praktiske å bruke kulekoordinater, slik at $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}} dS$.