Universitetet i Oslo

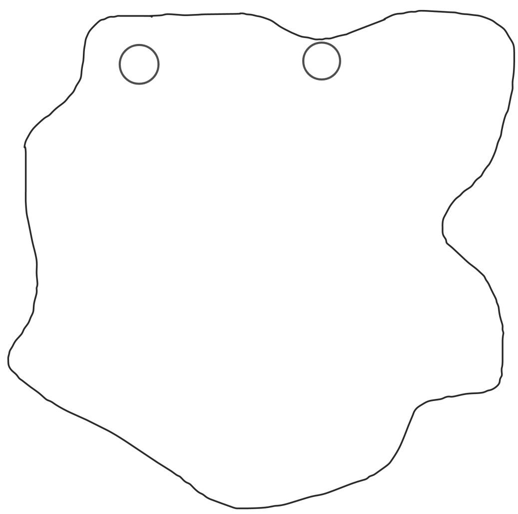
FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett 2

Oppgave 1 Diskusjonsoppgaver

a) Stå helt inntil en vegg og prøv å plukke opp noe som ligger på gulvet foran deg. Hvorfor får du det ikke til?

b) Figur 1 viser et objekt med en komplisert, ikke kjent massefordeling (vi antar for enkelhets skyld at det er todimensjonalt). Det er to hull slik at det kan henges opp på flere ulike måter. Bruk det du har lært om statikk og kraftmoment til å beskrive hvordan du kan finne massesenteret til dette objektet.



Figur 1: Objektet som blir beskrevet i oppgave 1b).

c) Se figur 2. Vurder de følgende utsagnene om den lengre markerte veien mellom A og B: Er noen av dem sanne?

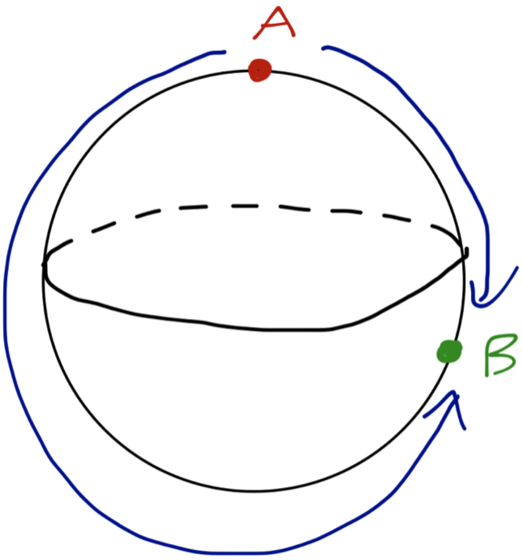
A. Det er ikke en gyldig løsning; grensebetingelsene for Euler-Lagrange-likningen er ikke oppfylt.

B. Den maksimerer avstanden mellom A og B.

C. Den minimerer avstanden mellom A og B.

d) Gå gjennom utledningen av Euler-Lagrange-likningen (kapittel 6.2. i Taylor) i detalj, og forsikre dere om at dere forstår fremgangsmåten og overgangene som blir gjort.

[1] `https://physicscourses.colorado.edu/EducationIssues/ClassicalMechanics/`



Figur 2: Figur fra University of Colorado Boulder.[1]

Oppgave 2 Euler-Lagrange, bevarte størrelser

Her ser vi på to oppgaver fra Taylor som viser hvordan Euler-Lagrange-likningene (som vist i likning (6.13)) i visse tilfeller kan lede til bevarte størrelser, dersom f er uavhengig av enten y eller x.

a) Taylor, oppgave 6.10.

b) Taylor, oppgave 6.20.

Oppgave 3 Korteste vei på en kule

a) Taylor, oppgave 6.1.

Hint: For å finne det infinitesimale lengdeelementet ds kan du skrive ned posisjonsvektoren som

$$\mathbf{r} = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

og derivere med hensyn på θ og ϕ. ds er da gitt ved

$$ds = \sqrt{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi\right|^2}.$$

b) Taylor, oppgave 6.16.

Oppgave 4 Euler-Lagrange-likningene (fra Boas, 2006)

Finn en generell løsning (altså bestemt opp til to vilkårlige konstanter som kan finnes fra grensebetingelsene) for en todimensjonal kurve $y(x)$ slik at de følgende integralene blir stasjonære. Det holder å gjøre to av tre deloppgaver for å få godkjent.[2]

Du kan få bruk for integralene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sinh^{-1} x + c, \tag{1}$$

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\sqrt{1-x^2} + c. \tag{2}$$

a) $\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1-y'^2} dx$

b) $\int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + y^2) dx$

c) $\int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{x}$, der $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

[2]... men det er god trening å gjøre alle :)