Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett 3

Oppgave 1 Lagrange-mekanikk vs. Newtons mekanikk

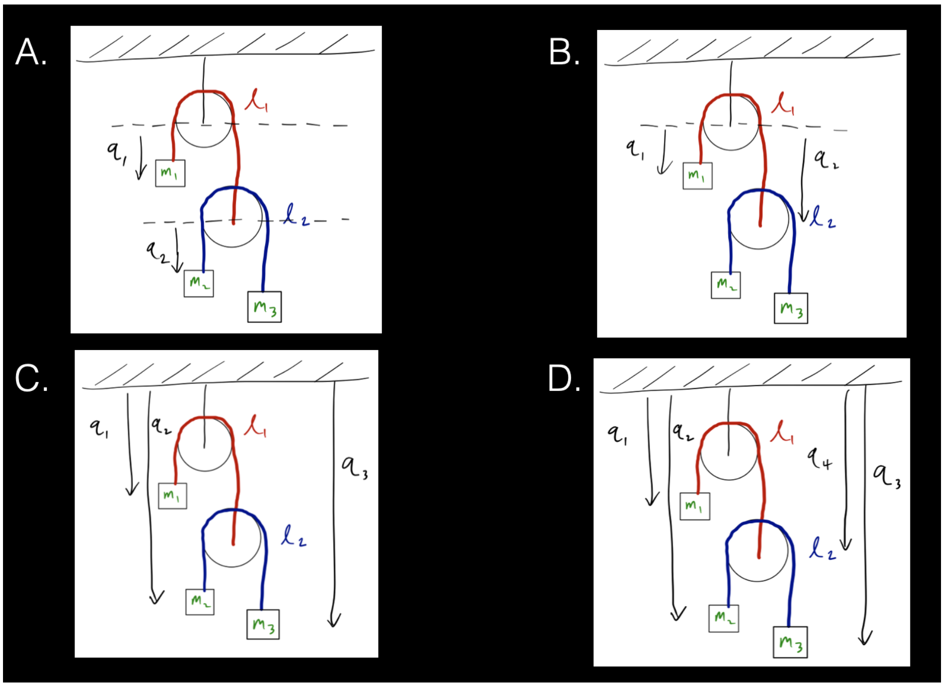
a) Hva er fordelene med Lagrange-mekanikk sammenlignet med Newtons mekanikk?

b) For å illustrere dette: Kikk på et av systemene som beskrives i kapittel 7.5 i Taylor, og diskuter kort (med ord) hvordan utregningene ville blitt mye mer kompliserte dersom man brukte Newtons mekanikk.

Oppgave 2 Frihetsgrader, generaliserte koordinater (del 1)

(Fra University of Colorado Boulder[1])

Se figur 1. Hvilket sett med generaliserte koordinater beskriver systemet fullstendig, samtidig som antall koordinater er lik antall frihetsgrader?



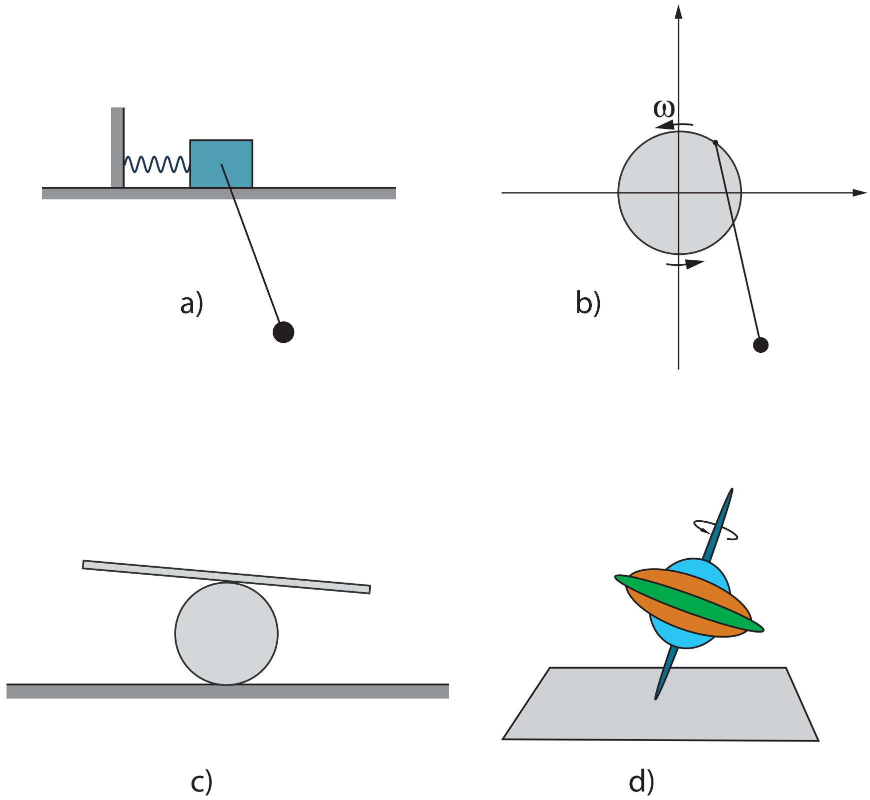
Figur 1: 4 forslag til generaliserte koordinater for et fysisk system. Fra University of Colorado Boulder.

Oppgave 3 Frihetsgrader, generaliserte koordinater (del 2)

(Fra Leinaas, 2019)

[1] https://physicscourses.colorado.edu/EducationIssues/ClassicalMechanics/

Figur 2 viser fire forskjellige mekaniske systemer. Hvor mange frihetsgrader trengs for å beskrive hvert av disse systemene? Hvilke generaliserte koordinater ville du brukt for å beskrive dem?



Figur 2: Fire ulike mekaniske systemer. Fra Leinaas, 2019.

a) En pendel festet til en blokk, som igjen er festet til en fjær.

b) En pendel festet til en vertikal skive, som roterer med en bestemt vinkelfrekvens ω.

c) En stav som kan vippes uten å skli, som ligger på toppen av en sylinder; sylinderen kan rulle horisontalt.

d) En snurrebass som beveger seg på et horisontalt gulv.

Oppgave 4 Konstantledd i den potensielle energien

(Fra University of Colorado Boulder)

En partikkel beveger seg i x-retning, som beskrevet av Lagrangefunksjonen $\mathcal{L} = T - U$. Gitt at vi adderer en konstant C til U; hva endrer seg?

A. Ingenting; virkningen S og den fysiske veien $x(t)$ er uendret.

B. Verdien til S endres, men den fysiske veien $x(t)$ gjør det ikke.

C. Den nye fysiske veien tilfredsstiller $\delta S = C$.

D. Den fysiske veien forskyves til $x(t) + C$.

Oppgave 5 Polare koordinater

a) Vi uttrykker posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ i polare koordinater som $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} + \phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Her er $\hat{\mathbf{r}}$ en enhetsvektor som er rettet den veien r øker raskest, og $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ er en enhetsvektor som peker den veien ϕ øker raskest. Peker $\hat{\mathbf{r}}$ samme retning overalt? Hva med $\hat{\boldsymbol{\phi}}$? Hvis ja, hvilke retninger? Hvis nei, tegn opp et kartesisk koordinatsystem med x- og y-akse, og tegn opp $\hat{\mathbf{r}}$ og $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ noen forskjellige steder.

b) Anta at posisjonsvektoren endres litt. F.eks. flytter vi en partikkel fra $\mathbf{r}$ til $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Hva blir $d\mathbf{r}$ uttrykt i polare koordinater? (Vi ønsker altså å uttrykke $d\mathbf{r} = (\text{noe})\hat{\mathbf{r}} + (\text{noe annet})\hat{\boldsymbol{\phi}}$.)

> **Hint:** Tegn opp $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, og komponentene av $d\mathbf{r}$ i $\hat{\mathbf{r}}$- og $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-retning. Ble vist i forelesningen.

c) Vi ønsker nå å uttrykke gradienten ∇U i polare koordinater. Man kan gjøre det ved å starte med gradienten i kartesiske koordinater,

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}},$$

og skifte variable, men vi ønsker å gjøre det mer direkte ved å bruke en viktig egenskap som dere lærte i MAT1100: [2]

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r}. \tag{1}$$

Altså at hvis man flytter seg $d\mathbf{r}$, endres U med $dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r}$. Bruk (1) og forrige deloppgave til å vise at

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{2}$$

Oppgave 6 Atwood-maskin

Taylor, oppgave 7.17.

Oppgave 7 Pendel i akselererende heis

Taylor, oppgave 7.22.

[2] I matematikken har dere muligens skrevet at retningsderivert av $f(\mathbf{a},\hat{\mathbf{u}})$ i punktet $\mathbf{a}$ og med retning gitt av enhetsvektoren $\hat{\mathbf{u}}$, er $f'(\mathbf{a},\hat{\mathbf{u}}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$. Vi kan dele med $|d\mathbf{r}|$ på begge sider av (1); da blir den på samme form.