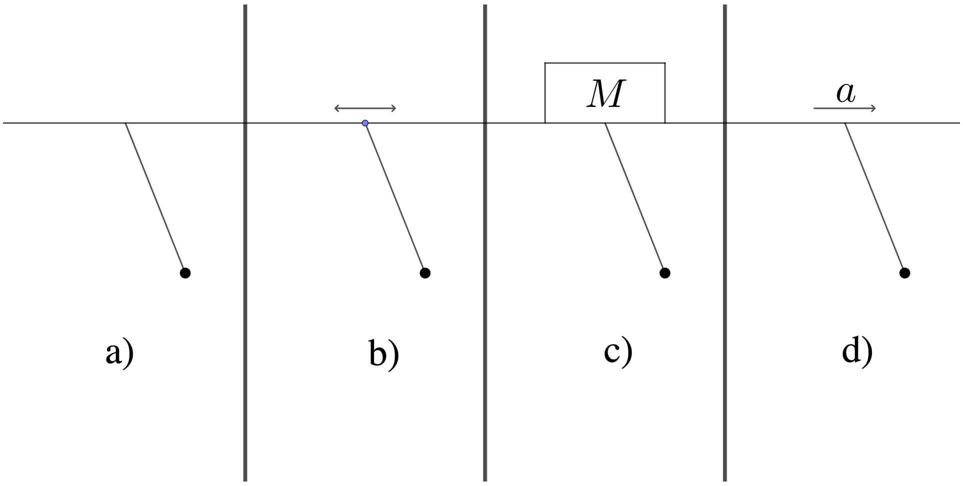
Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett 4

Oppgave 1 Frihetsgrader



Figur 1: Fire pendler som er festet på ulike måter

Figur 1 viser fire pendler som er festet på forskjellige måter. Finn antall frihetsgrader i hvert tilfelle når punktet det er festet i:

a) Er låst til en fast posisjon.

b) Kan bevege seg fritt, der vi antar at mekanismen pendelen er festet i er masseløs.

c) Kan bevege seg fritt, hvor vi nå regner med massen M til festet.

d) Akselererer mot høyre med en konstant akselerasjon a.

Oppgave 2 Bevegelse fra potensiell energi

Vi ser på et endimensjonalt problem, som vi antar har en bevegelseslikning gitt ved

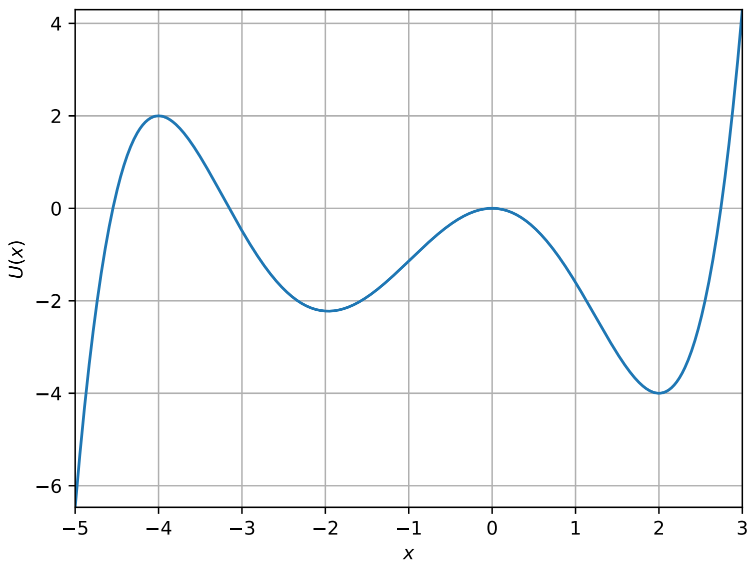
$$m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}U(x), \tag{1}$$

hvor $U(x)$ er et eller annet potensial. Om vi ganger begge sider med $\dot{x}$ kan dette alternativt skrives som

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}U(x), \tag{2}$$

altså betyr det at likning (1) beskriver et system hvor $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ er bevart.

Gitt at potensialet har formen som vist i figur 2, og at partikkelen starter fra $x = 2$ med $\dot{x} > 0$: Beskriv med ord hvordan partikkelen vil bevege seg dersom (a) $-4 < E < 0$ (b) $0 < E < 2$ (c) $E > 2$.



Figur 2: Den potensielle energien til et tenkt endimensjonalt system, som funksjon av x.[1]

Oppgave 3 To-legeme-problemet

a) Er $\dot{r}^2$ og $\dot{\mathbf{r}}^2$ det samme? Hvis ja, forklar hvorfor. Hvis nei, finn sammenhengen. Du kan begrense deg til to dimensjoner.

b) Når vi skal løse to-legeme-problemet, løser vi problemet gitt av Lagrangefunksjonen $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)$, se Taylor 8.2-8.3. Hvis du har løst dette problemet og funnet banen $\mathbf{r}(t)$ som funksjon av tiden t, hvordan er den relatert til banene til de to legemene? Dere trenger bare diskutere spesialtilfellene (a) to nabostjerner, $m_1 = m_2$, og (b) en satelitt m_2 rundt jorda m_1, dvs. $m_2 \ll m_1$.

c) Forklar fysikken som er inneholdt i fig. 8.4 i Taylor.

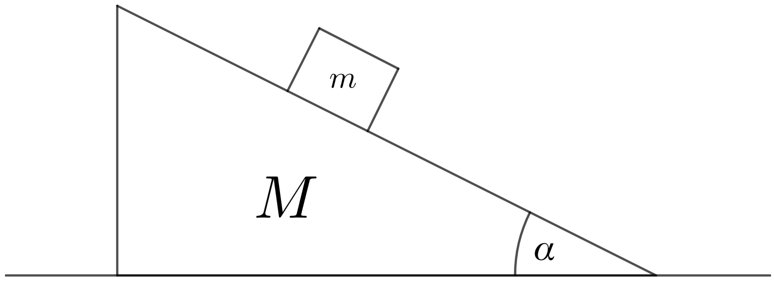
d) To-legeme-problemet har 6 frihetsgrader, siden det inneholder to "frie" (i den forstand at det ikke er noen føringer involvert) legemer i tre dimensjoner. Likevel kan vi redusere det til et endimensjonalt problem. Forklar hvilke prinsipper som gjør dette mulig.

Oppgave 4 Masse på bevegelig skråplan

En kloss med masse m sklir friksjonsfritt ned en rampe, med masse M, som også kan skli friksjonsfritt på et horisontalt underlag (se figur 3).

a) Argumenter for at systemet har to frihetsgrader, og at det dermed kan beskrives ved de to generaliserte koordinatene q_1 — klossens posisjon på

[1] For de spesielt interesserte er potensialet gitt ved $U(x) = \frac{23}{576}x^5 + \frac{19}{96}x^4 - \frac{13}{48}x^3 - \frac{113}{72}x^2$. Ikke spør.



Figur 3: Skisse av systemet beskrevet i oppgave 4; både klossen og rampen kan bevege seg fritt.

skråplanet, målt fra toppunktet, og q_2 — den horisontale posisjonen til rampen relativt til et gitt referansepunkt.

b) Bruk de generaliserte koordinatene fra forrige oppgave til å vise at Lagrangefunksjonen til systemet er gitt ved

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(M+m)\dot{q}_2^2 + m\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha + mgq_1\sin\alpha. \tag{3}$$

c) Lagrangefunksjonen i likning (3) er uavhengig av q_2, i tillegg til tiden t. Som dere har sett i oppgavesett 2 fører dette til bevaringslover; i dette tilfellet kan vi definere størrelsene

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2}\dot{q}_2 - \mathcal{L}, \\ B &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2}, \end{aligned}$$

som begge er bevarte gjennom bevegelsen til systemet. Regn ut disse og vis at de er gitt ved $A = E \equiv T + U$ og $B = p_x$, altså at A er den totale mekaniske energien i systemet, og B er det totale drivet i x-retning.

d) Lagrange-likningene har løsningen (se eksempel 7.5. i Taylor, s. 159–160 for detaljer)

$$\ddot{q}_1 = \frac{g\sin\alpha}{1 - \frac{m\cos^2\alpha}{M+m}}, \tag{4}$$

$$\ddot{q}_2 = -\frac{m}{M+m}\ddot{q}_1\cos\alpha. \tag{5}$$

Hva skjer dersom massen til rampen går mot 0? Beskriv bevegelsen til klossen i dette tilfellet, og diskuter om den virker fornuftig.

> **Hint:** Finn x- og y-komponentene til bevegelsen, i forhold til det horisontale planet.

Oppgave 5 Kjeglesnitt i polarkoordinater

I forelesningene vil dere se at banen i et gravitasjonelt tolegemesystem (for eksempel en stjerne og en planet) kan beskrives ved et todimensjonalt koordinatsystem (r,ϕ), der de to koordinatene er forbundet ved

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos\phi}, \tag{6}$$

hvor c og ϵ er positive konstanter. Dette er polarkoordinat-versjonen av et kjeglesnitt, hvor "typen" kjeglesnitt bestemmes av verdien til ϵ. Vis, ved å skrive de kartesiske koordinatene som $(x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, at denne beskriver:

> **Hint:** Fremgangsmåten i alle delene er omtrent den samme: Begynn fra likning (6), og sett inn $\cos\phi = x/r$; derfra kan uttrykket løses for r slik at du får
>
> $$r^2 = x^2 + y^2 = c^2 + x^2\epsilon^2 - 2cx\epsilon \tag{7}$$
> $$\Rightarrow x^2\left(1-\epsilon^2\right) + 2c\epsilon x + y^2 = c^2. \tag{8}$$
>
> Herfra vil utregningen variere avhengig av verdien til ϵ.

a) En ellipse, $\frac{(x+d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, med $a = \frac{c}{1-\epsilon^2}$, $b = \frac{c}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ og $d = a\epsilon$, når $0 \leq \epsilon < 1$.

b) En parabel, $y^2 = c^2 - 2cx$, når $\epsilon = 1$.

c) **[Frivillig]** En hyperbel, $\frac{(x-\delta)^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, med $\alpha = \frac{c}{\epsilon^2-1}$, $\beta = \frac{c}{\sqrt{\epsilon^2-1}}$ og $\delta = \alpha\epsilon$, når $\epsilon > 1$.

> **Hint:** Utregningen er nesten identisk som i del a, men husk at faktoren $\left(1-\epsilon^2\right)$ i likning (8) nå er negativ.