

# Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

## Oppgavesett 5

### Oppgave 1 Ellipsebaner

Alle oppgaver og figurer fra University of Colorado Boulder.<sup>1</sup>

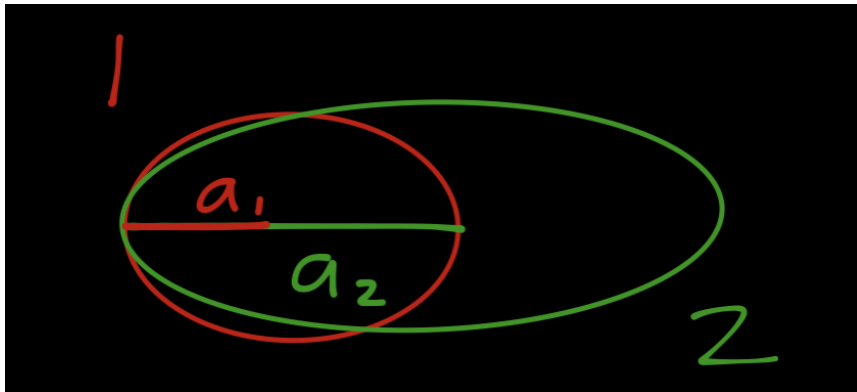
a) Banene er generelt beskrevet av likningen

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi}, \quad (1)$$

der  $c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu}$ ,  $\gamma = Gm_1m_2$ , og energien er gitt fra  $\epsilon$  via  $E = \frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2}(\epsilon^2 - 1)$ . Hva er den minste mulige avstanden  $r_{\min}$ , og for hvilken vinkel  $\phi$  inntreffer den?

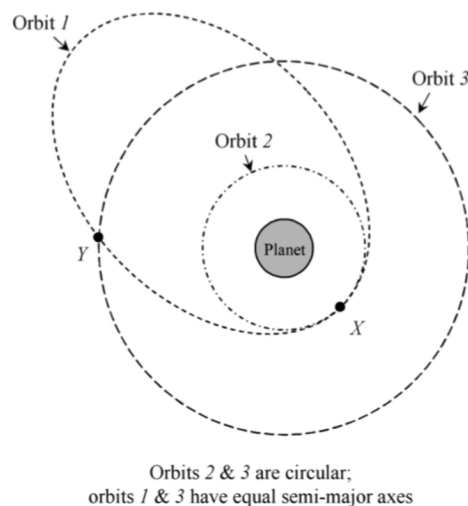
- A.  $r_{\min} = c$ ,  $\phi = \pi/2$
- B.  $r_{\min} = c$ ,  $\phi = 0$
- C.  $r_{\min} = c/(1 + \epsilon)$ ,  $\phi = \pi/2$
- D.  $r_{\min} = c/(1 - \epsilon)$ ,  $\phi = \pi$
- E.  $r_{\min} = c/(1 + \epsilon)$ ,  $\phi = 0$

b) Figur 1 viser to ulike baner (for de samme legemene, altså er massene de samme) med samme spinn  $\ell$ . Hva kan du si om energien til de to banene?



Figur 1: To ulike baner med samme  $\ell$ . Figur fra University of Colorado Boulder.

- A.  $E_1 > E_2$
- B.  $E_2 > E_1$
- C.  $E_1 = E_2$
- D. Ingenting



Figur 2: Tre ulike baner. Figur fra University of Colorado Boulder.

c) Figur 2 viser tre ulike baner (som i forrige deloppgave er det samme legeme for alle banene) rundt en planet. Ranger dem etter spinn  $\ell$ :

- A.  $\ell_1 > \ell_2 = \ell_3$
- B.  $\ell_1 < \ell_2 = \ell_3$
- C.  $\ell_1 = \ell_2 < \ell_3$
- D.  $\ell_2 < \ell_1 < \ell_3$
- E.  $\ell_2 > \ell_1 > \ell_3$

## Oppgave 2 Sirkulær bane

Vi ser nå på en satellitt med masse  $m$  som kretser rundt jorda  $M$ . Se bort fra månen, sola og alle andre masser.

a) Finn sammenhengen mellom banefarten til satellitten og radiusen til banen, slik du har gjort det i FYS1100 eller Fysikk 2.

b) Se på fig. 8.4-8.5. Hvor på figurene finner du en sirkulær bane? Ut fra figuren og uttrykket for det effektive potensialet  $U_{\text{eff}}(r)$ , finn baneradius  $r$ , og kontroller at den er lik den du fant i forrige deloppgave.

c) Generell løsning for banen  $r(\phi)$  har blitt utledet i forelesningene/boka, og er

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

der  $c$  og  $\epsilon$  er konstanter som du kan finne uttrykk for i boka. Vis at et spesialtilfelle er en sirkulær bane med radius slik du fant i de forrige deloppgavene.

<sup>1</sup><https://physicscourses.colorado.edu/EducationIssues/ClassicalMechanics/>

### Oppgave 3 Tolegemesystem: Hookes lov

- a) Taylor, oppgave 8.8.
- b) [Frivillig] Taylor, oppgave 8.11.

**Hint:** I likhet med i gravitasjonstilfellet kan vi se på den relative bevegelsen som todimensjonal; bevegelseslikningene fra forrige oppgave fører da umiddelbart til en løsning av formen

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (2)$$

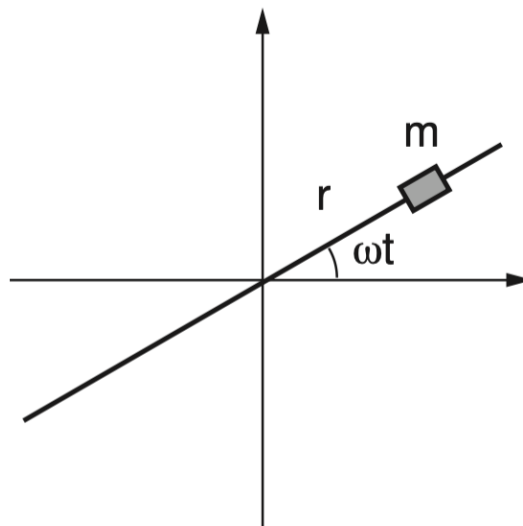
$$y = C \cos \omega t + D \sin \omega t, \quad (3)$$

hvor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  er konstanter som bestemmes av initialbetingelsene. Dette kan ses på som et sett med likninger for de to "ukjente"  $\cos \omega t$  og  $\sin \omega t$ ; løs disse og sett løsningen inn i formelen  $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$ .

### Oppgave 4 Masse på roterende stav

(Fra Leinaas, 2019)

Et lite legeme med masse  $m$  beveger seg friksjonsfritt på en stav, se figur 3. Staven roterer i det horisontale planet, med konstant vinkelhastighet  $\omega$ , rundt punktet  $r = 0$ .



Figur 3: Legeme som sklir på en horisontal stav. Fra Leinaas, 2019.

a) Finn Lagrange-likningen for den radielle koordinaten  $r$ , og vis at når  $\dot{r}(0) = 0$ ,  $r(0) = r_0$ , har likningen løsningen  $r = r_0 \cosh \omega t$ .

b) Lag en skisse av banen i  $xy$ -planet, med  $t$  begrenset av  $\omega t \lesssim \pi$ .

## Oppgave 5 Kræsje i Mars?

- a) Se på de ubundne Kepler-banene (f.eks. fig. 8.11 s. 314 i Taylor), og diskuter intuitivt om det er sannsynlig at en romsonde på vei grovt sett mot Mars kræsjer i Mars. Hva er det som normalt vil skje i stedet?
- b) Velg koordinater slik at Mars er i origo. En romsonde (med masse  $\mu$ ) befinner seg fjernt fra Mars, slik at den potensielle energien er neglisjerbar. Den befinner seg i punktet  $(x, y = b)$ , der  $x$  er negativ, og  $b \ll |x|$ . Hastigheten er  $v$  i positiv  $x$ -retning. Tegn opp situasjonen, og finn spinnets  $\ell$ .
- c) Vi antar for enkelhets skyld at energien er stor slik at  $\epsilon \gg 1$ . Finn den minste avstanden til sentrum av Mars som romsonden vil få. Hva skal til for at romsonden kræsjer?