Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett 6

Oppgave 1 Akselererte systemer

Et godt råd er å velge og jobbe i *enten* “labsystemet” som ikke er akselerert, *eller* det akselerte systemet, og ikke blande disse sammen ved å jobbe litt både her og der samtidig, uten at man innser hva som hører til hvilket system.

a) Du sitter fastspent i en bil som bremser opp. Tegn opp alle horisontale krefter som virker på deg når (i) man ser situasjonen fra bakken, og når (ii) man ser situasjonen fra bilen.

b) En person sitter i en karusell. Tegn de horisontale kreftene som virker på personen dersom (i) du ser situasjonen i bakke-systemet/labsystemet, og dersom (ii) du ser situasjonen i karusell/det akselererte systemet. I karusellsystemet, har personen en akselerasjon?

c) Forklar med ord hvorfor det er flo (=høyvann) på begge sider av jorda, både den siden som vender mot månen og den siden som vender bort fra månen. Hvor mange ganger er det flo i Bergen i løpet av ett døgn (sånn ca.)?

d) Søk opp “cyclone” på f.eks. Wikipedia, og se på de ulike bildene. Klarer du å se på bildene om de er tatt fra et sted nord for eller sør for ekvator?

e) En stein slippes fra et 100 m høyt tårn ved ekvator. Vi ser bort fra luftmotstand. I Taylor kap. 9.8 vises det at steinen vil treffe jorda 2,2 cm øst for punktet rett nedenfor der steinen slippes fra. Dette er pga. jordrotasjonen.

Først, forklar at sentrifugalkraften ved ekvator vil bare føre til redusert tyngdeakselerasjon, mens Corioliskraften vil gi avbøying mot øst.

Deretter, les forklaringen nedenfor. Den prøver å forklare avbøyingen, fra synspunktet til et inertialsystem. Den kan ikke stemme, siden den forutsier en avbøying mot vest i stedet for mot øst. Hva er galt? Prøv å diskutere dere fram til en fornuftig forklaring med ord.

“Mens steinen er i lufta, vil jorda rekke å rotere, slik at steinen treffer bakken lenger vest. Steinen er i lufta i tida t, der $\frac{1}{2}gt^2 = h$, og $h = 100$ m. På denne tida har jorda rotert $R\Omega t = 4{,}5$ m, der R er jordas radius og Ω er vinkelhastigheten.”

Oppgave 2 Hva om halve sola blir borte?

a) Taylor, oppgave 4.41.

b) Taylor, oppgave 8.29.

Hint: Virialteoremet fra forrige deloppgave sier at en masse på en sirkulær bane under et tiltrekkende potensial $U = kr^n$, har kinetisk energi gitt ved

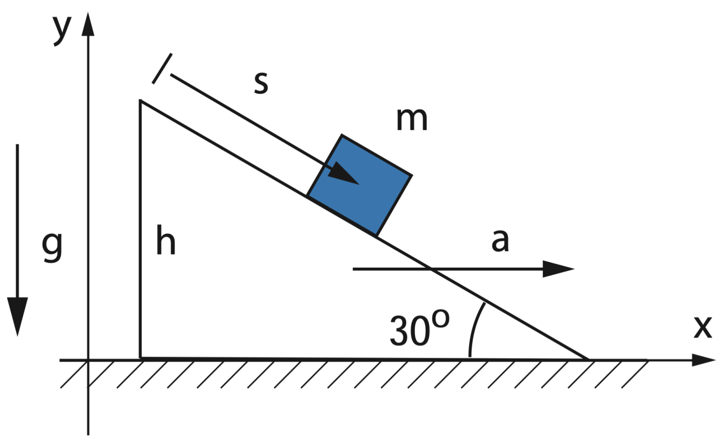
$$T = n\frac{U}{2}. \tag{1}$$

Dette kan brukes til å regne ut den kinetiske energien jorda har mens sola fortsatt er hel. Umiddelbart etter at massen til sola er redusert vil den kinetiske energien til jorda være uendret, mens den potensielle energien endres. Med dette kan du finne den totale energien til jorda, og diskutere hva verdien av denne betyr for den videre banen.

Oppgave 3 Akselererende skråplan

(Del a–c fra Leinaas, 2019)

En kloss med masse m sklir friksjonsfritt ned et skråplan som vist i figur 1. Planet lager en vinkel på 30° med bakken, og beveger seg horisontalt med konstant akselerasjon a (vi antar at det er i ro ved tid $t = 0$). Systemet kan beskrives med generalisert koordinat s, som gir forskyvingen til klossen langs planet.



Figur 1: En kloss sklir ned et akselererende skråplan. Fra Leinaas, 2019.

a) Anta først at planet er i ro, med $a = 0$. Uttrykk de kartesiske koordinatene x,y til klossen som funksjoner av s, og finn Lagrangefunksjonen uttrykt ved s og $\dot{s}$.

b) Vi antar nå $a \neq 0$. Regn ut de kartesiske koordinatene, og deres tidsderiverte, som funksjoner av s og $\dot{s}$, og skriv ned Lagrangefunksjonen.

c) Finn Lagrange-likningen til systemet, og løs den med initialbetingelsene $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$.

d) Vi ser nå på systemet med Newton-mekanikk i referansesystemet som følger planet, der vi regner effekten av akselerasjonen som en fiktiv kraft $\mathbf{F}_a = -m\mathbf{a} = (-ma, 0)$. Bruk prinsippene fra statikk-oppgavene i oppgavesett 1 for å finne ut hvor stor akselerasjonen må være for at klossen skal holde seg i ro i det akselererte systemet (altså at den ikke beveger seg i forhold til planet), og verifiser at du får det samme svaret som du ville fått fra løsningen av forrige deloppgave.

Oppgave 4 Roterende referansesystem

(Basert på en oppgave fra Leinaas, 2019)

Vi ser på en fri partikkel som beveger seg i det horisontale planet. Vi ønsker å studere partikkelens bevegelse sett fra et roterende referansesystem: La (x_0, y_0) representere koordinatene til et fast referansesystem, mens (x, y) er koordinatene i det roterende systemet; de to koordinatsystemene er knyttet sammen via uttrykkene

$$x_0 = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t, \tag{2a}$$

$$y_0 = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t, \tag{2b}$$

der Ω er (den konstante) rotasjonshastigheten.

a) Vis at Lagrangefunksjonen uttrykt med koordinatene i det roterende systemet er gitt ved

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \Big[\big(\dot{x} - \Omega y\big)^2 + \big(\dot{y} + \Omega x\big)^2 \Big] \tag{3}$$

Hint: Siden bevegelsen er horisontal er det ingen potensiell energi fra tyngdekraften. Lagrangefunksjonen er altså

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \big(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\big), \tag{4}$$

hvor $\dot{x}_0$ og $\dot{y}_0$ kan finnes fra likning (2) (når du deriverer disse uttrykkene, husk at du får bidrag både fra tidsavhengigheten til x og y, og fra den eksplisitte tidsavhengigheten i cosinus- og sinusfunksjonene).

b) Finn bevegelseslikningene for x og y, og sammenlign med Newtons andre lov i et roterende referansesystem (Taylor s. 343, likning (9.34)). Bruk at vinkelhastighetsvektoren kan skrives som

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}, \tag{5}$$

der $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}$ og $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}$.