

Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Oppgavesett 9

Oppgave 1 Rotasjon og treghetsmoment

a) Du holder et hjul som spinner med rotasjonsakse $\boldsymbol{\omega}$ rett oppover. Spinnet til hjulet er \mathbf{L} rett oppover. Så snur du det spinnende hjulet rundt så rotasjonsaksen blir rett nedover. Du sitter hele tiden på en kontorstol som er fri til å rotere rundt (og du har ikke beina på gulvet). Forklar hvorfor du og stolen får et spinn, og finn ut hvor stort og i hvilken retning. Se bort fra friksjon og luftmotstand.

b) (Fra University of Colorado Boulder¹)

Når man spinner en kortstokk i verdensrommet vil rotasjonsretningen dens generelt være ustabil (se f. eks. <https://youtu.be/fPI-rSwAQNg>). Vi vet at det ikke virker noe kraftmoment, og at $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$. Hvordan kan $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ samtidig som $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \neq 0$?

- A. $\boldsymbol{\omega}$ er faktisk konstant; den tilsynelatende endringen i rotasjonsretning skyldes en annen effekt.
- B. \mathbf{I} avhenger også av tid, så likningene er konsistente.
- C. Det opprinnelige kraftmomentet som gjør at stokken spinner forårsaker etter hvert en endring i \mathbf{L} .
- D. Spinnet er ikke bevart; kraftmomentet er kun lik $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ for rotasjon om en fast akse.

c) Et legeme roterer med vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$. Anta at $\boldsymbol{\omega}$ er konstant. Vis følgende påstand: Hvis \mathbf{L} ikke er parallell med $\boldsymbol{\omega}$, så trengs et eksternt kraftmoment for å opprettholde rotasjonen $\boldsymbol{\omega}$.

d) Treghetsmoment-tensoren \mathbf{I} for en kube er $\mathbf{I} = \frac{1}{6}Ma^2\mathbf{1}$, der $\mathbf{1}$ er 3×3 identitetsmatrisen. Dette er for rotasjon om senteret til kuben (se Taylor s. 383-384). Vil kuben kunne rotere av seg selv langs en vilkårlig akse gjennom senteret?

e) Finn treghetsmoment-tensoren for en boks med sidekanter a , b , og c (langs hhv. x -, y - og z - retning), for rotasjon om senteret til boksen. Anta at massen M er jevnt fordelt over volumet av boksen.

Vil boksen kunne rotere av seg selv om alle akser gjennom sentrum?

f) Definer *hovedakser* for treghetsmoment. Vis ut fra denne definisjonen at hvis x -, y - og z -aksene er hovedakser, blir treghetsmoment-tensoren diagonal. Hva er tolkningen til de diagonale elementene?

¹<https://physicscourses.colorado.edu/EducationIssues/ClassicalMechanics/>

Oppgave 2 Massesenter og treghetsmoment fra integraler

a) Taylor, oppgave 10.5.

b) Taylor, oppgave 10.9.

Hint: Integralet er klart enklest å løse i sylinderkoordinater, $(x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$, hvor $\int dV = \int \rho d\rho \int d\phi \int dz$.