FYS1120 H-10: Løsningsforslag for midtveiseksamen

Oppgave 1
Elektroner akselereres gjennom et elektrisk potensial V slik at de oppnår en hastighet $v = 1.4 \times 10^7$ m/s. De blir sendt videre inn i et homogent magnetfelt B som står normalt på papirplanet. Der beveger de seg langs en sirkelbane med radius $r_e = 1.5$ cm. For elektroner er ladning-masse forholdet kjent lik $e/m = -1.75 \times 10^{11}$ C/kg. (*Magnetfeltet i figuren har feil retning!*)

1a) Bruk denne informasjon til å beregne potensialet V.

Kinetisk energi etter akselerasjon er $mv^2/2 = eV$ som gir $V = mv^2/2e$, det vil si

$$V = \frac{(1.4 \times 10^7 m/s)^2}{2 \times 1.75 \times 10^{11} C/kg} = 0.56 \times 10^3 Nm/C = 560\,V.$$

1b) Hvor stort er magnetfeltet B?

Radiell akselerasjon $mv^2/r_e = evB$ slik at $B = mv/er_e$. Derfor er

$$B = \frac{1.4 \times 10^7 m/s}{1.75 \times 10^{11} C/kg \times 1.5\,cm} = \frac{10^{-2}}{1.88}\frac{Ns}{Cm} = 5.3 \times 10^{-3} T$$

1c) Ved nærmere undersøkelser viser det seg at elektronstrålen også inneholder en liten forurensning av tyngre partikler som beskriver sirkelbaner med radius $r_p = 21$ cm. Hva må ladning-masse forholdet q/M for disse partiklene være?

Da $mv^2/r_e = evB$ og $v = \sqrt{2Ve/m}$, følger at $e/m = 2V/r_e^2B^2$. På samme måte for tunge partikler $q/M = 2V/r_p^2M^2$. Elimineneres nå potensialet V, får man $q/M = (e/m)(r_e/r_p)^2$ som gir

$$\frac{q}{M} = -1.75 \times 10^{11} \frac{C}{kg}\Big(\frac{1.5}{21.0}\Big)^2 = -8.93 \times 10^8 C/kg.$$

Oppgave 2
Et kuleskall har indre radius $r = a$ og ytre radius $r = 2a$. Det er laget av et dielektrisk materiale med dielektrisk konstant $\kappa = 1.25$ og har en konstant tetthet ρ av frie ladninger.

2a) Størrelsen av det elektriske forskyvningsfeltet $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ er bestemt av den frie ladningstettheten ρ. Vis herav at dielektrikumet i alminnelighet også inneholder bundne ladninger gitt ved ladningstettheten $\rho_b = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P}$.

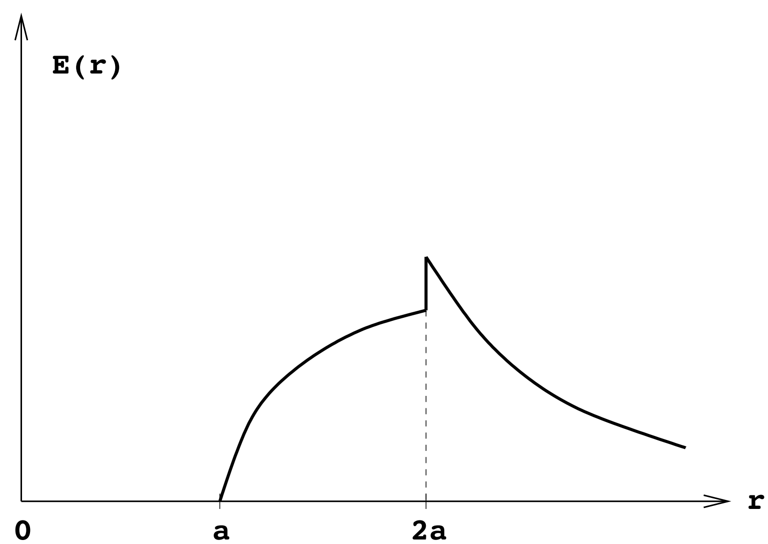
Da Maxwell sier at $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ og Gauss mener at $\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_b)/\varepsilon_0$, følger direkte at $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$ da begge har rett.

2b) Gjør bruk av Gauss' lov til å beregne det elektriske feltet $E(r)$ innenfor og utenfor kuleskallet som funksjon av radius r. Skissér det som funksjon av radius r fra $r = 0$ til $r \gg 2a$. Hva kan grunnen være at det er diskontinuerlig for $r = 2a$?

Når vi bruker Gauss innenfor $r = a$, er den omsluttede ladning lik null og derfor $D = E = 0$ for $0 < r < a$. En Gauss-flate med radius r inni dielektriket omslutter en ladning $(4/3)\pi(r^3 - a^3)\rho$ som gir her et elektrisk forskyvningsfelt $D = \rho(r - a^3/r^2)/3$ og derfor et elektrisk felt $E = D/\kappa\varepsilon_0$ med $\kappa = 5/4$ som betyr at

$$E(r) = \frac{4\rho}{15\varepsilon_0}\Big(r - \frac{a^3}{r^2}\Big)$$

Like innenfor den ytre overflaten er derfor $E(r = 2a_-) = 7\rho a/15\varepsilon_0$. Utenfor denne vil en Gauss-flate med radius r omslutte en total ladning $4\pi((2a)^3 - a^3)/3 = 28\pi\rho a^3/3$ som gir for $r > 2a$ et forskyvningsfelt $D = 7\rho a^3/3r^2$. Det tilsvarende elektriske feltet



i dette området er dermed $E(r) = 7\rho a^3/3\varepsilon_0 r^2$. Like utenfor den ytre overflaten har det verdien $E(r = 2a_+) = 7\rho a/12\varepsilon_0$. Det er derfor en faktor $5/4 = \kappa$ større enn like innenfor som antydet i figuren.

2c) Beregn polarisasjonsvektoren $\mathbf{P}$ og bruk den til å finne tettheten av induserte overflateladninger på de to flatene $r = a$ og $r = 2a$.

Polarisasjonen i dielektrikumet er gitt som $P = D - \varepsilon_0 E$. Med resultatene over for $D(r)$ og $E(r)$ gir dette $P(r) = (\rho/15)(r - a^3/r^2)$ som er rent radiell. Da flatetetthet *av bundne ladninger på dielektrikumets overflater er gitt ved $\sigma_b = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}$ hvor $\hat{\mathbf{n}}$ er flatenormalen, ser vi at på den indre overflaten $r = a$ er der ingen slike overflateladninger. Men på den ytre overflaten finner vi $\sigma_b = (\rho/15)(2a - a^3/(2a)^2) = 7\rho a/60$.*

2d) Ved hjelp av resultatet i a) utled et uttrykk for ρ_b i dielektrikumet som funksjon av r. Finn nå diskontinuiteten for $r = 2a$ i det elektriske feltet som ble påvist i 2b).

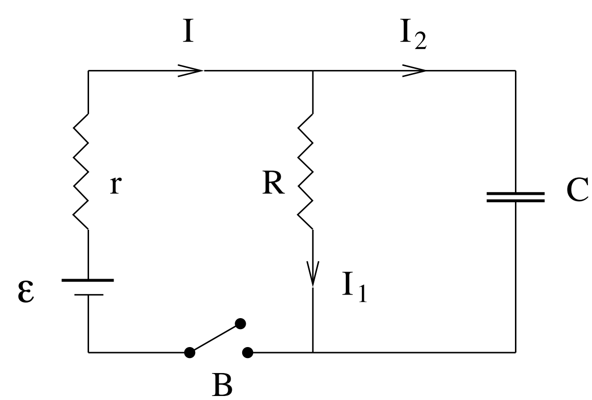
Da polarisasjonen P varierer med radius, vil der også oppstå en tetthet av bundne ladninger. Fra 2a) blir denne

$$\rho_b = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 P\Big) = -\frac{\rho}{15r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 - a^3) = -\frac{1}{5}\rho$$

Netto ladningstetthet inni dielektrikumet blir derfor $\rho + \rho_b = -(4/5)\rho$ som forklarer hvorfor det elektriske feltet er en faktor 4/5 mindre innenfor enn utenfor overflaten $r = 2a$. Diskontinuiteten i det elektriske feltet skyldes den bundne ladningen på denne overflaten da $E(r = 2a_+) - E(r = 2a_-) = \sigma_b/\varepsilon_0$ som lett verifiseres med våre tidligere resultat.

Oppgave 3

En kondensator C er koblet til et batteri med spenning $\mathcal{E}$. Batteriet har en indre motstand r. Parallelt med kondensatoren er koblet inn en motstand R som figuren viser. Kondensatoren antas opprinnelig å være uladet. Ved tiden $t = 0$ lukkes



bryteren B og batteriet vil gi strømmer i kretsen.

3a) Hvor store er stømmene gjennom motstand R og kondensatoren C like etter at bryteren er lukket?

Kondensatoren virker da som en kortslutning som tar hele strømmen $I = \mathcal{E}/r$. Ingen strøm går derfor gjennom R.

3b) Hvor stor blir ladningen på kondensatoren mye senere når den er fullt opp-ladet?

Kondensatoren blokkerer nå strøm. Derfor vil strømmen fra batteriet gå gjennom motstandene r og R i serie og blir $I = \mathcal{E}/(R+r)$. Dette skaper en spenning over kondensatoren $V = RI = \mathcal{E}R/(R+r)$. Den har derfor en ladning $Q = CV = \mathcal{E}RC/(R+r)$.

3c) Bruk Kirchhoffs lover til å utlede en differensialligning som den tidsavhengige ladning $Q(t)$ på kondensatoren må oppfylle.

Fra figuren ser vi at Kirchhoffs sløyferegel for strømmer gir $I = I_1 + I_2$. Spenningsfallene i venstre sløyfe må oppfylle $\mathcal{E} = Ir + I_1 R$, mens for høyre sløyfe ser vi at $RI_1 = Q/C$. Her er $Q = Q(t)$ den instantane ladning på kondensatoren slik at $I_2 = dQ/dt$. De to første ligningene gir $I_1 = (\mathcal{E} - rI_2)/(r+R)$ som innsatt i den siste forenkles til

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\Big) = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

Tidskonstanten for denne kretsen er derfor $\tau = R_e C$ hvor den effektive motstanden $R_e = Rr/(R+r)$ resulterer fra parallelkoblingen av R og r.

3d) Løs denne og vis at svarene du resonnerte deg frem til i a) og b) er riktige.

Denne lineære, første ordens differensialligning kan løses ved direkte integrasjon som i forelesningene. Man får da

$$Q(t) = \frac{\mathcal{E}RC}{R+r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

hvor grensebetingelsen $Q(t=0) = 0$ er benyttet. For veldig sene tider $t \gg \tau$ ser vi da at $Q(t \to \infty) = \mathcal{E}RC/(R+r)$ som stemmer med hva vi resonnerte oss frem til i spørsmål 3b). Strømmen gjennom kondensatoren $I_2 = dQ/dt$ blir nå

$$I_2(t) = \frac{\mathcal{E}RC/\tau}{R+r}e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{r}e^{-t/\tau}$$

Like etter vi har slått på bryteren er dermed $I_2(t=0) = \mathcal{E}/r$ slik at strømmen gjennom motstanden R blir $I_1(t=0) = 0$. Mye senere når $t \gg \tau$ ser vi derimot at $I_2(t \to \infty) = 0$ slik at da vil hele strømmen gå gjennom R. Den blir $I = I_1 = \mathcal{E}/(R+r)$ som vi også fant tidligere.