FYS1120 Elektromagnetisme H-10: Oppgavesett 2

Oppgave 1
En ring med radius b har en jevnt fordelt elektrisk ladning q. Vi skal beregne det elektriske feltet i et punkt på en akse som står normalt på ringens plan og går gjennom dens sentrum i en avstand z fra dette.

a) Forklar hvorfor feltet vil ha en retning langs aksen.

b) Vis at feltet har en størrelse

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

c) Bruk dette resultatet til å beregne det elektriske feltet utenfor et kuleskall med radius a i en avstand r fra kulens sentrum når dette skallet har en jevnt fordelt elektrisk ladning Q.

d) Utfra samme beregning vis at feltet i et vilkårlig punkt innenfor kuleskallet er null. Faraday's bur!

e) Benytt resultatet i c) til å finne feltet utenfor en massive kule som inneholder en jevnt fordelt, elektrisk ladning Q. Et enkelt resultat etter en ikke helt enkel beregning! Først gjennomført av Newton i forbindelse med gravitasjonkraft fra en kuleformet planet.

Oppgave 2
I et to-dimensjonalt plan med kartesiske koordinater (x, y) har vi gitt et elektrisk felt $\mathbf{E} = -(8x/y)\mathbf{e}_x + (4x^2/y^2)\mathbf{e}_y$.

a) Tegn inn feltvektoren i noen utvalgte punkter for å danne deg et bilde av de tilsvarende feltlinjene.

b) Vis at feltlinjene i alminnelighet er gitt ved differensialligningen $dy/dx = E_y/E_x$ og løs denne for det gitte feltet.

c) Feltlinjene skal stå normalt på ekvipotensiallinjene som derfor er gitt ved differensialligningen $dy/dx = -E_x/E_y$. Løs også denne og tegn inn noen typiske kurver.

d) Beregn potensialet $V = V(x, y)$ for det oppgitte vektorfeltet.

e) Vis at dette vektorfeltet er konservativt, det vil si at curl (hvirvling) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Oppgave 3
En elektriske ladning $q = 1.0$ pC flyttes fra et punkt **1** i avstand $r = 2$ cm fra origo til et punkt **2** med $r = 6$ cm i feltet fra en punktladning $Q = 2.0$ nC som er plassert i origo og illustrert i figuren.

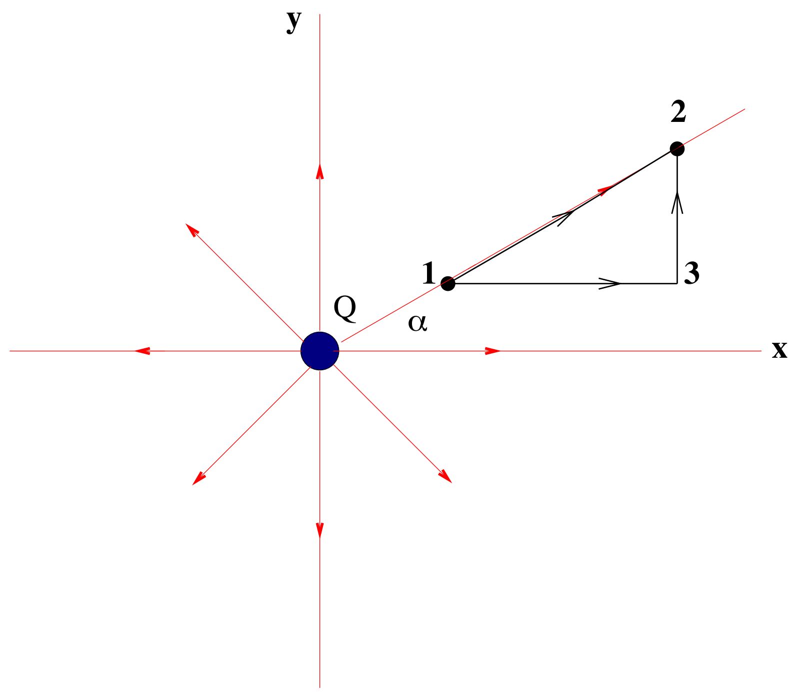

Figure 1: Noen feltlinjer i xy-planet når en ladningen Q befinner seg i origo.

a) Beregn det utførte arbeid når forflytningen skjer i radiell retning langs en linje som danner en vinkel $\alpha = \pi/6$ med x-aksen.

b) Gjenta beregningen når forflytningen skjer i $xy-$planet, først langs x-aksen til punktet **3** og så videre langs y-aksen til punktet **2**. Hva har du å om resultatet?

Oppgave 4
En elektrisk dipol består av to ladninger $\pm q$ separert ved avstandsvektoren $\mathbf{d}$ som har retning fra den negative til den positive ladningen. Dette elektrisk nøytrale systemet utgjør derfor en dipol med moment $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$.

a) Beregn det elektriske potensialet for dipolen i en avstand $\mathbf{r}$ fra denne. Vis at det blir $V(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}/4\pi\varepsilon_0 r^2$ når dipolen er plassert med sitt sentrum i origo og $|\mathbf{r}| \gg d$. Her er $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ en enhetsvektor langs $\mathbf{r}$.

b) Utled herav et generelt uttrykk for det elektriske feltet rundt dipolen ved bruk av relasjonen $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$.

c) Bruk dette resultatet til å beregne feltvektoren $\mathbf{E}$ når feltpunktet $\mathbf{r}$ ligger henholdsvis på x eller y-aksen og dipol-momentet $\mathbf{p}$ er orientert langs y-aksen. Sammenlign med hva som ble regnet ut i vektoranalyse-notat 1.