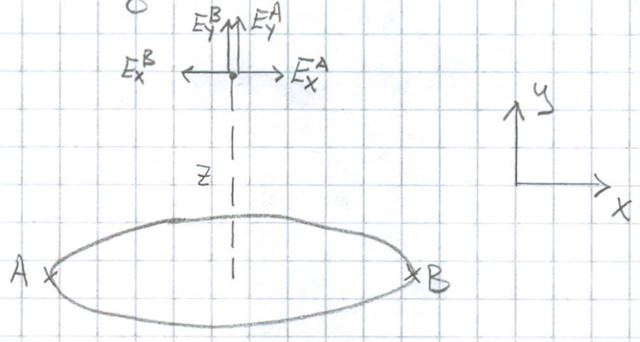
16.9.2010

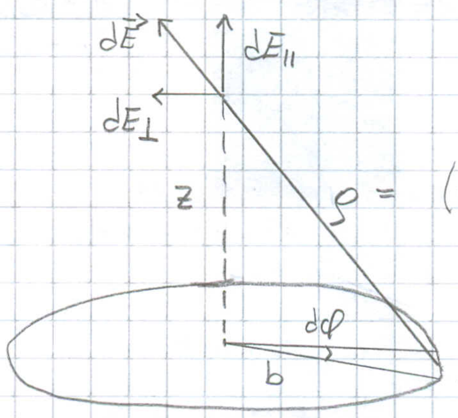
FYS1120, oppgavesett 2, oppgave 1, løsningsforslag

1a Feltet har retning langs aksen fordi symmetri får komponenter normalt på aksen til å kansellere.

Se f. eks. på diametralt motstående punkter. De gir motsatt rettede normalkomponenter, men parallelle komponenter langs aksen



b Feltet langs aksen beregnes ved å summere bidragene fra punktladninger, som vi får ved å dele opp ringen:



$\rho = (z^2 + b^2)^{1/2}$ (bokstaven r brukes i neste oppgave)

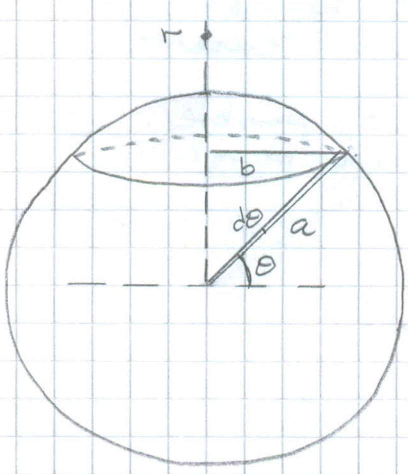
$$dq = \frac{q}{2\pi b} \cdot b\, d\varphi = \frac{q}{2\pi}\, d\varphi$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho^2} \hat{\rho} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{b}{\rho}, \frac{z}{\rho} \right)$$

$$dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{2\pi}\, d\varphi\, \frac{z}{(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$E_{\parallel} = \int_0^{2\pi} dE_{\parallel} = \underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + b^2)^{3/2}}}, \quad \text{QED}$$

c/d Feltet fra en kule kan beregnes ved å dele den opp i mange ringer og så summere (integrere) bidragene fra disse.



Total ladning Q

$b = a\cos\theta$

$z = r - a\sin\theta$

$q = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot 2\pi b \cdot a\,d\theta$

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$E = \int E_{ring}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi a^2} 2\pi a\cos\theta\, a\,d\theta \frac{(r - a\sin\theta)}{\left([r - a\sin\theta]^2 + a^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, a\cos\theta \frac{(r - a\sin\theta)}{(r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta)^{3/2}}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$u = a\sin\theta$

$du = a\cos\theta\, d\theta$

$u\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -a$

$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2a} \underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{r - u}{(r^2 + a^2 - 2ru)^{3/2}}\, du}_{= I}$$

Det vil kreve en del regning å vise at $I = 2a/r^2$ for $r > a$ og at $I = 0$ for $r < a$.
Skriver om telleren til to ledd der det ene er lik innmaten i nevneren:

$$r - u = r + \frac{1}{2r}\left(-2ru + r^2 + a^2 - [r^2 + a^2]\right)$$

$$r - u = r - \frac{r^2+a^2}{2r} + \frac{1}{2r}\left(r^2+a^2-2ru\right)$$

Integralet I kan nå deles opp i to integraler , $I = J + K$

$$J = \left(r - \frac{r^2+a^2}{2r}\right)\underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{1}{(r^2+a^2-2ru)^{3/2}}\,du}_{=\tilde{J}}$$

$$K = \frac{1}{2r}\int_{-a}^{a} \frac{r^2+a^2-2ru}{(r^2+a^2-2ru)^{3/2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2r}\int_{-a}^{a} \frac{1}{(r^2+a^2-2ru)^{1/2}}\,du$$

$\tilde{J}$ og K løses enkelt bare man husker på at både r og a er konstanter. Man må imidlertid være oppmerksom på fortegn når man setter inn for grensene :

$$\tilde{J} = \left(-\frac{2}{1}\right)\left(\frac{1}{-2r}\right)\Big[(r^2+a^2-2ru)^{-1/2}\Big]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{(r-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r+a)^2}}\right]$$

$$\sqrt{(r-a)^2} = \begin{cases} r-a, & r>a \\ a-r, & r<a \end{cases}$$

$$r>a \begin{cases} = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{r-a} - \dfrac{1}{r+a}\right] \\ = \underline{\dfrac{1}{r}\,\dfrac{2a}{r^2-a^2}} \end{cases}$$

$$r<a \begin{cases} = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{a-r} - \dfrac{1}{a+r}\right] \\ = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{2r}{a^2-r^2} \\ = \underline{\dfrac{-2}{r^2-a^2}} \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{2r}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{1}{-2r}\right)\Big[(r^2+a^2-2au)^{1/2}\Big]_{-a}^{a}$$

$$r>a \begin{cases} = -\frac{1}{2r^2}\big[r-a-(r+a)\big] \\ = -\frac{1}{2r^2}(-2a) \\ = \underline{\frac{a}{r^2}} \end{cases}$$

$$r<a \begin{cases} = -\frac{1}{2r^2}\big[a-r-(a+r)\big] \\ = -\frac{1}{2r^2}(-2r) \\ = \underline{\frac{1}{r}} \end{cases}$$

I er altså

$$I = J + K$$

$$r>a \begin{cases} = \underbrace{\underbrace{\left(r - \frac{r^2+a^2}{2r}\right)}_{=\frac{r^2-a^2}{2r}} \frac{1}{r}\frac{2a}{r^2-a^2}}_{=\frac{a}{r^2}} + \frac{a}{r^2} \\ = \underline{\frac{2a}{r^2}} \end{cases}$$

$$r<a \begin{cases} = \underbrace{\left(r - \frac{r^2+a^2}{2r}\right)\frac{(-2)}{r^2-a^2}}_{=-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r} \\ = \underline{0} \end{cases}$$

Setter vi tilbake i uttrykket for E har vi altså vist at

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & , r > a \\ 0 & , r < a \end{cases}$$

Retningen til E er radielt utover. Det følger både av symmetri og av at ringenes akser er radielle.

e En massiv kule kan vi tenke oss bygget opp av konsentriske kuleskall. Siden alle bidrar med et felt

$$E_{skall} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{skall}}{r^2}$$

og r er den samme for alle skall er feltet utenfor kulen

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}.$$

Bemerkning:

Vi kunne ha funnet løsningen på oppgave e langt enklere ved å argumentere for sfærisk symmetri og så legge en (tenkt) gaussflate som et kuleskall i avstand r fra kulens sentrum.