FYS1120: Uke 36 - Numerikk og vektoranalyse 3

Oppgaver i FYS1120-Elektromagnetisme gitt ved UiO høsten 2010. Oppgavene i vektoranalyse denne uken er ganske omfattende. Derfor vil neste ukes oppgave i numerikk være såpass enkel at du kan tillate deg å havne litt på etterskudd med dette oppgavesettet.

Oppgave 3.1: Fundamentalteoremet for gradienter

Kontroller at

$$\int_{\substack{\mathbf{a}\\ \mathcal{P}}}^{\mathbf{b}} (\nabla T) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a})$$

for $T = xy^2$. Her betyr $\mathcal{P}$ at integralet er uavhengig av veien, resultatet skal altså gjelde for alle veier fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$. Velg for eksempel $\mathbf{a} = (0,0,0)$ og $\mathbf{b} = (2,1,0)$ og én vei langs de to katetene og én vei langs hypotenusen i trekanten du får i xy-planet. Sammenlign med resultatet du får ved å beregne høyresiden direkte.

3.3 Divergensteoremet

Du skal nå vise at

$$\int_\tau \nabla \cdot \mathbf{A} \; \mathrm{d}\tau = \int_\sigma \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \; \mathrm{d}\sigma.$$

a) Les gjennom kapittel *4.3 Divergensen til et vektorfelt* i kompendiet for MEK1100[1]. Lukk heftet. Gjennomfør beregningen selv.

b) Les også gjennom kapittel *7.4 Gauss' sats (divergensteoremet)*. Lukk heftet. Gjennomfør beregningen selv.

3.3 Partikkel i elektrisk felt

I denne oppgaven skal du skrive et program som beregner banen til en partikkel som beveger seg i et elektrisk felt. For enkelhets skyld gjør vi tidsintegrasjonen med Euler-Cromers metode, selv om en høyereordens metode (som Runge-Kutta til 4. orden) ville gi mer nøyaktige resultater. I Euler-Cromers metode brukes den nyeste verdien av farten v til å beregne neste verdi av posisjonen x. $F(t)$ er kraften på partikkelen og m er massen. I 1D kan metoden se slik ut (pseudokode):

```
x = 0;
v = 0;
for t = 0:dt:1
```

[1] `http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MEK1100/h10/undervisningsmateriale/komp_H07.pdf`

```
    v = v + dt*F(t)/m;
    x = x + dt*v;
end
```

a) Plasser en partikkel med masse $m = 1$ og ladning $q = 1$ (som vanlig bruker vi dimensjonsløse størrelser) i et konstant elektrisk felt $\mathbf{E} = (1, 0, 0)$. Velg $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$ og $\mathbf{v}(t = 0) = (0, 0, 0)$. Integrer beveglsen fra $t = 0$ til $t = 1$ med tidssteg $\mathrm{d}t = 10^{-4}$. Plott partikkelens x-posisjon som funksjon av t for alle t.

b) Finn den analytiske løsningen og forsikre deg om at programmet produserer samme resultat.

c) Velg så $\mathbf{E} = (1, 2, -5)$. Plott $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ i samme aksekors med hver sin farge. Lag et annet plott som viser $v_x(t)$, $v_y(t)$ og $v_z(t)$. Er resultatet som forventet?

d) Bruk funksjonen `plot3` til å vise banen til partikkelen i 3D. Finn frem til et tidsvariabelt elektrisk felt som produserer en bane du synes er festlig. Et utgangspunkt er

```
E = @(t) [sin(omega*t) cos(.1*omega*t^2) t^3];
```

Her har vi definert E som en funksjon av variabelen t ved hjelp av en anonym funksjon i MATLAB. Når vi trenger det elektriske feltet et sted i koden, skriver vi bare `E(t)`, og får da verdien til det elektriske feltet ved tiden t. Skriv `doc function_handle` i kommandovinduet og les eksempel 2 for å lære mer om anonyme funksjoner.