Løsningsforslag for eksamen i FY101 – Elektromagnetisme torsdag 12. desember 2002

Ved sensurering vil alle delspørsmål i utgangspunktet bli gitt samme vekt (uavhengig av oppgavenummer), men vi forbeholder oss retten til justeringer. I løsningsforslaget er bit for bit av oppgaveteksten gitt i kursiv, etterfulgt av en mulig løsning. Det tas forbehold om feil.

Oppgave 1

a) *Forklar hvorfor ikke konduktans er det inverse av resistans ved vekselstrøm.*

Admittans $Y = G + jB$ er per definisjon det inverse av impedans $Z = R – jX$. Av dette følger at G ikke er det inverse av R. Man vil for eksempel finne at $G = R / (R^2 + X^2)$.

b) *Hva er den totale impedansen til en spole og en kondensator som er koblet i serie, hvis de har samme reaktans-verdi?*

Den blir null, fordi: $j\omega L + 1/j\omega C = j\omega L – j/\omega C = j\,(X_L – X_C) = 0$

c) *Lyspære L1 har dobbelt så stor resistans som lyspære L2 (vi regner her resistansen som konstant, dvs. uavhengig av strømmen gjennom lyspærene). Vi kobler så de to lyspærene til et batteri. Hvilken pære vil lyse sterkest hvis pærene er koblet etter hverandre i serie? Forklar.*

De er koblet i serie, altså er strømmen den samme gjennom pærene. Siden $P = UI = RI^2$, så vil effekten være proporsjonal med resistansen, og pæra med høyest resistans vil lyse sterkest.

d) *Hva hvis de er koblet i parallell – hvilken lyser da sterkest? Forklar.*

Her vil spenningen over pærene være den samme (for begge pærene). Siden $P = UI = U^2 / R$, så vil effekten være omvendt proporsjonal med resistansen, og pæra med lavest resistans vil lyse sterkest.

e) *En ladd partikkel beveger seg i en rett linje gjennom rommet. Betyr det at det ikke er noe magnetfelt i området? Forklar.*

Nei, vi husker at $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, som betyr at $\mathbf{F} = 0$ hvis partikkelen beveger seg parallelt eller anti-parallelt med **B**.

f) *Hva er forskjellen mellom dielektrisitetskonstant (relativ permittivitet) og dielektrisk styrke?*

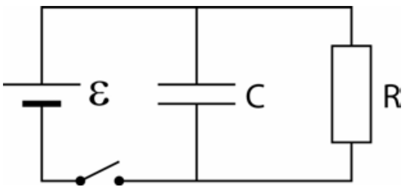
Dielektrisitetskonstanten sier noe om materialets evne til å la seg polarisere og inngår således i uttrykket for kapasitans, mens dielektrisk styrke sier noe om hvor stort elektrisk felt materialet tåler før det bryter sammen elektrisk (som regel betyr det at en del av materialet ioniseres og at den elektriske ledningsevnen øker dramatisk).

g) *To seriekoblede kondensatorer med kapasitans $C_1 = 5{,}0\ \mu F$ og $C_2 = 3{,}0\ \mu F$ er koblet i parallell med en kondensator $C_3 = 8{,}0\ \mu F$. Finn den samlede kapasitansen til denne sammenkoblingen.*

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \frac{15}{8} + 8 = 9{,}875 \quad \text{dvs. } \underline{C = 9{,}875\ \mu\text{F}}$$

Oppgave 2

En enkel RC-krets er koblet til en likespenningskilde (batteri) med ubetydelig indre motstand. Strømmen fra spenningskilden kan slås på eller av ved hjelp av en bryter som vist på figur 1. Resistansen $R = 1\ k\Omega$ og kapasitansen $C = 5\ \mu F$. Den elektromotoriske spenningen $\varepsilon = 5\ V$.



Figur 1: RC-krets med bryter.

a) *Anta at bryteren har vært lukket lenge og at den åpnes ved tiden $t = 0$. Sett opp og løs de nødvendige ligningene for å finne tidsforløpet av strømmen gjennom motstanden uttrykt ved R, C og ε. Finn den numeriske verdien for tidskonstanten.*

$$\frac{Q}{C} + Ri = 0 \Rightarrow i = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{hvor} \quad Q_0 = \varepsilon C$$

$$\tau = RC = 5 \cdot 10^{-3} s$$

b) *Anta nå at den indre resistansen i batteriet $R_i = 0{,}1\ \Omega$, at bryteren er åpen og at ladningen på kondensatoren er null. Ved tiden $t = 0$ lukkes bryteren. Tegn skjematisk hvordan kretsen nå ser ut og beregn tidsforløpet for ladningen på kondensatoren uttrykt ved R_i, R, C og ε. Finn den numeriske verdien for tidskonstanten. Hva betyr det for den tiden det tar å lade opp kondensatoren at $R_i \rightarrow 0$?*

Figur 1 vil nå få en resistans R_i i serie med batteriet og bryteren er lukket. Vi har nå to sløyfer:

Venstre sløyfe: $\varepsilon + R_i i_1 - \frac{Q}{C} = 0$, hvor i_1 er strømmen gjennom R_i.

Høyre sløyfe: $\frac{Q}{C} + Ri_2 = 0$, hvor i_2 er strømmen gjennom R.

Dessuten: strømmen ”gjennom” C: $i_3 = i_2 - i_1 = dQ / dt$

Kombinert gir det: $\varepsilon = \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{R_i}{R}\right) + R_i \frac{dQ}{dt}$

Når t→∞ er dQ/dt = 0, så da blir $Q = Q_0 = \dfrac{\varepsilon C}{1+\dfrac{R_i}{R}}$ en løsning (asymptotisk).

Settes Q = Q_0 + q(t) generelt opp, fås $\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{1+\dfrac{R_i}{R}}{R_i C} q$ som gir $q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ med $\tau = \dfrac{R_i C}{1+\dfrac{R_i}{R}}$

$Q = \dfrac{\varepsilon C}{1+\dfrac{R_i}{R}}\left(1+e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ fordi $q_0 = -Q_0$ for å gi $Q_{(t=0)} = 0$

I resten av oppgaven brukes ikke numeriske verdier for de størrelsene som inngår

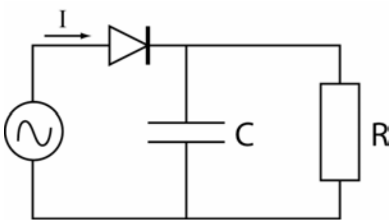
c) *Spenningskilden erstattes med en vekselspenningskilde som leverer en spenning $\varepsilon = \varepsilon_0$ sin(ωt) uavhengig av belastningen i kretsen. Dessuten fjernes bryteren fra kretsen. Finn tidsforløpet av strømmen i alle tre greinene av kretsen.*

Med i_1, i_2 og i_3 brukt som benevnelse på strømmene i de samme greinene som før, fås:

Q = εC , $i_3 = \dfrac{dQ}{dt} = -\varepsilon_0 C\omega \cos \omega t$

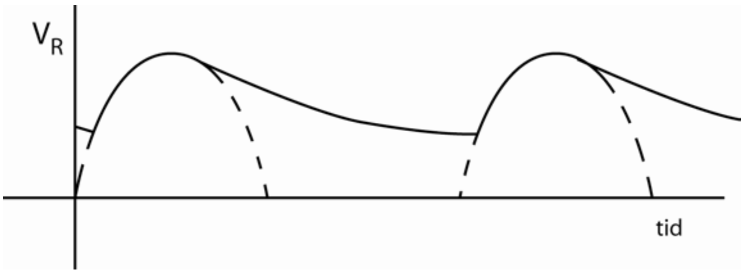
ε = Ri_2 , $i_2 = \dfrac{-\varepsilon_0 \sin \omega t}{R}$

$i_1 = i_2 - i_3 = \varepsilon_0\left(\dfrac{1}{R}\sin \omega t + C\omega \cos \omega t\right)$



Figur 2: RC-krets med diode. Dioden leder kun strøm i den angitte retning.

d) *Kretsen skal brukes til å lage en enkel likeretter. Det blir defor satt inn en diode som vist på figur 2. Vi regner dioden som ideell, dvs. den leder strøm "uhindret" i den retning som er angitt i figuren, men sperrer for strøm i motsatt retning. Tegn en figur som viser kvalitativt spenningen over motstanden når C = 0. På samme figur skal også spenningen over motstanden tegnes inn når C er forskjellig fra null. Forklar kvalitativt hvordan denne kurven vil endres dersom verdien av C økes. Forklar også hva slags relasjon det må være mellom størrelsene ω, R og C for at dette skal bli en god likeretter.*



Når C økes vil utladningskurven løfte seg og spenningen over motstanden vil variere mindre med tiden. Tidskonstanten for utladningsfasen er $\tau = RC$ mens tiden for en syklus er $\omega T = 2\pi$. For at det skal være en god likeretter bør $T < \tau$ eller $T << \tau$, dvs. $C >> 1/R\omega$.

(**NB!** Her kan det være tvil om hva som menes med en "god likeretter". Det må ikke nødvendigvis tolkes som en likeretter som glatter spenningen mest mulig, men kan tvert i mot også tolkes som en likeretter som for eksempel slipper de positive halvperiodene uhindret gjennom. Begge svarene vil godkjennes som "riktige".)

e) *Sett opp og løs de ligningene som viser tidspunktet i hver syklus når dioden stenger for strøm. Vær nøye med å presisere hvilken av flere mulige løsninger som må velges. Hvilken betingelse må være oppfylt for at strømmen skal begynne å gå gjennom dioden igjen?*

Dioden stenger for strøm ved tidspunktet $t = t_1$ hvor $i_1(t_1) = 0$ og $di_1/dt < 0$.

$$\frac{1}{R}\sin\omega t_1 + C\omega\cos\omega t_1 = 0 \quad \text{dvs.} \quad \tan\omega t_1 = -\omega RC$$

Tangens-uttrykket vil være negativt og gå gjennom $-\omega RC$ hver gang ωt_1 går gjennom andre og fjerde kvadrant (altså mellom $\pi/2$ og, π eller mellom $3\pi/2$ og 2π, osv.). Vi må velge løsningen i andre kvadrant siden det er der $di_1/dt < 0$.

Når det ikke går strøm gjennom dioden er spenningen over motstanden lik spenningen over kondensatoren V_C. For at det skal begynne å gå strøm gjennom dioden må $\varepsilon > V_C$.

Oppgave 3

To like store ladninger befinner seg i ro på x-aksen og i avstand a på hver side av origo.

a) *Hvor stor kraft virker på hver av ladningene når ladningene har størrelse $e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ C og avstanden $a = 0{,}37\cdot10^{-10}$ m. Tomromspermittiviteten $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ C^2/Nm^2.*

$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(2a)^2} \approx 3{,}2\cdot10^{-8}\,N$ hvor F_x er kraften i positiv x-retning på ladningen som ligger i (a,0). Kraften på ladningen i (-a,0) er $-F_x$.

b) *Ladningene sitter på partikler med masse $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg (protoner). Hvor stor blir akselerasjonen i første øyeblikk dersom partiklene slippes fri?*

$$F_x = m \cdot a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{F_x}{m} \approx 1{,}9 \cdot 10^{19}\, m/s^2$$

c) *Vi tenker oss igjen at ladningene ligger i ro slik som i første del av oppgaven. To like, men negative ladninger med samme absolutte størrelse som de positive ladningene befinner seg i ro i punktene (0,y) og (0,-y) på y-aksen. Hvor stor kraft virker på hver av partiklene uttrykt ved størrelsene e, a og y ?*

På grunn av symmetrien blir det bare en kraft langs y-aksen på de negative ladningene. Hvis avstanden mellom en positiv og en negativ ladning er $r = \sqrt{a^2 + y^2}$, blir kraften på ladningen i (0,-y): $F_y = \left(\frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{y}{r} \right) - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{(2y)^2} \right)$ og $F_x = 0$

d) *Forklar med ord hvordan kraften på de negative ladningene varierer når ladningene føres utover fra en avstand y << a til y >> a. Forklar at det må være en verdi for y hvor kraften på de negative ladningene er null, og regn ut hvor dette punktet er uttrykt ved størrelsen a.*

Når y<<a domineres kreftene av frastøting mellom de negative ladningene og $F_y<0$. Når y>>a "ser" de negative ladningene i hovedsak de to positive ladningene og $F_y>0$. Siden kraften varierer kontinuerlig må det være et punkt hvor $F_y=0$.

Fra c) følger at $F_y=0$ når: $\frac{2y}{r^3} = \frac{1}{(2y)^2} \Rightarrow 8y^3 = r^3 \Rightarrow 2y = r \Rightarrow 4y^2 = a^2 + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} a$

Oppgave 4

Lorentzkraften er gitt ved

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

a) *Redegjør kortfattet for størrelsene i formelen og forklar hvorfor det ikke gjøres arbeid på en ladd partikkel i et rent magnetisk felt.*

F er kraftvektoren som virker på ladningen q med hastigheten **v** i et elektrisk felt **E** og et magnetisk felt **B**.

Arbeid: $W_{12} = \int_1^2 d\vec{s} \cdot \vec{F}$

I et rent B-felt er **F** = q**v**×**B** vinkelrett på d**s** og d**s**·**F** derfor alltid lik 0.

b) *Anta en platekondensator med uendelig store plater, det vil si med homogene elektriske felt. Vis ved hjelp av Maxwells første ligning:*

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

at det elektriske feltet mellom platene er gitt ved

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

hvor σ er ladning per arealenhet. Forklar hva du gjør med en skisse.

Uendelig stor flate $\Rightarrow$ **E** er konstant

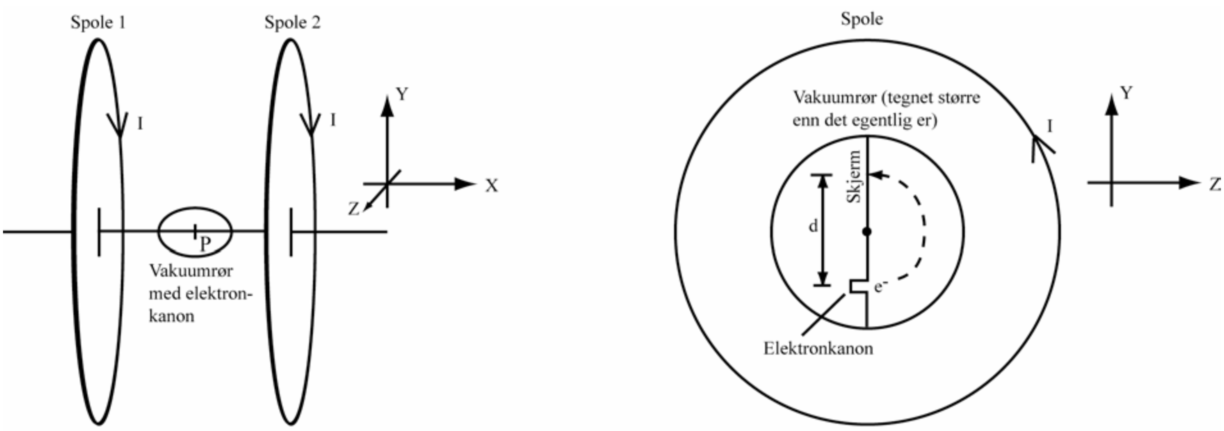
$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{(husk sylindrisk Gauss - flate med to endeflater)}$$

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} \equiv \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\text{To plater (dvs. kondensator)}: \mathrm{E_k} = 2E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

c) *Anta oppsettet i figuren.*



Figur 3: To spoler med vakuumrør mellom. Til venstre ser vi spolene og røret i xy-planet (z går ut av arket). Til høyre ser vi et snitt i yz-planet hvor den ytterste sirkelen er spolene og den innerste sirkelen er vakuumrøret som er tegnet større enn det egentlig er for å få fram detaljene. Vi regner at vakuumrøret med dets innhold ikke påvirker magnetfeltet fra spolene.

Vi skal nå bruke Biot-Savarts lov

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

til å bestemme det magnetiske feltet i punktet P som ligger på aksen midt mellom spolene. Hver av spolene har N viklinger og er plassert i en avstand R fra hverandre som også er radiusen til de to spolene. Vi regner ikke med at spolene har noen utstrekning i x-retningen. Hvis det går en strøm I som vist i figuren, vis at

$$\vec{B} = -0{,}714 \mu_0 N \frac{I}{R} \vec{e}_x$$

hvor $\vec{e}_x$ er enhetsvektoren langs x-aksen.

Hvis **r** er en vektor fra d**l** til punktet P og θ er vinkelen mellom **r** og yz-planet:

$$\vec{B}_p(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N}{4\pi}\int \frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

For en spole kansellerer y - bidraget og $d\vec{l} \perp \vec{r}$, og vi får :

$$\vec{B}_p(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N}{4\pi}\int \frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\cos\theta = \frac{\mu_0 N}{2}\frac{IR^2}{r^3}\vec{e}_x$$

Begge spolene : $r = \sqrt{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)} \Rightarrow$

$$\vec{B}_p(\vec{r}) = 2\left(\frac{\mu_0 N}{2}\frac{IR^2}{r^3}\vec{e}_x\right) = \frac{\mu_0 NIR^2}{R^3\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_x = -0{,}714\mu_0 N\frac{I}{R}\vec{e}_x$$

d) Elektronkanonen i figuren er i prinsippet en ideell platekondensator. Anta at elektronene beveger seg gjennom potensialforskjellen mellom platene og slipper ut via en liten spalt i den ene platen. Vis at absoluttverdien til hastigheten til et elektron som kommer ut av spalten, er gitt ved

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

hvor V er spenningen over kondensatoren, elektronmassen m_e = 0,511 MeV/c^2 og e er absoluttverdien til elektronets ladning. Hva blir hastigheten hvis spenningen er 50 V? Er dette en "relativistisk" hastighet? Hvor stort elektrisk felt tilsvarer denne spenningen hvis kondensatoren er 10 mm bred? I hvilken retning må feltet gå?

Elektronene går gjennom en potensialforskjell V:

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\tfrac{1}{2} m_e {v_z}^2 = eV$$

$$v_z = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

Med V = 50 V : $v_z = 13{,}9\cdot 10^{-3} c$

Hastigheten er altså ca. 1,4% av lyshastigheten c og kan dermed regnes som "ikke-relativistisk".

E = 50/0,01 = 50000 V/m i negativ z-retning.

e) Anta at du faktisk har akselerert et elektron og at magnetfeltet er konstant der elektronet beveger seg. I hvilken avstand d fra spalten vil elektronet da treffe skjermen i figuren?
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ A^2/N, R = 0,5 m, I = 7,5 A, c = $3\cdot 10^8$ m/s og elektronmassen som allerede angitt.

$$evB = \frac{mv^2}{d/2}$$

slik at : $d = \dfrac{2mvR}{0{,}714\mu_0 NIe}$

som med oppgitte verdier gir : $d = \dfrac{3{,}57m}{N}$