

# Løsningsforslag

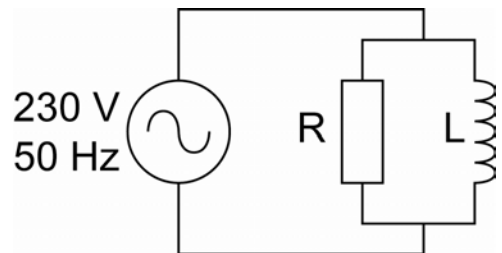
FYS1120 / FY101 / FYS112 – Elektromagnetisme, torsdag 18. desember 2003

Ved sensurering vil alle delspørsmål i utgangspunktet bli gitt samme vekt (uavhengig av oppgavenummer), men vi forbeholder oss retten til justeringer. I løsningsforslaget er bit for bit av oppgaveteksten gitt i kursiv, etterfulgt av en mulig løsning. Det tas forbehold om feil.

De tre første oppgavene er gitt i FYS1120

## Oppgave 1

Tenk deg at figuren til høyre skjematisk viser det elektriske anlegget i en bolig. Lysnettet leverer en spenning på 230 V rms med frekvens 50 Hz. Den totale belastningen på lysnettet i boligen kan forenkles til en resistans  $R = 100 \Omega$  i parallell med en induktans (spole)  $L = 1 \text{ H}$ . Vi regner spenningskilden som ideell.



- a) Hva er den elektriske admittansen til en parallellkobling av en induktans (spole) og en kapasitans (kondensator) hvis de har samme susceptansverdi? Begrunn svaret.

$Y = B_C - B_L = 0$ . I admittansplanet vil den kapasitive susceptansen tegnes oppover langs  $j$ -aksen og den induktive susceptansen nedover langs  $-j$ -aksen. Summen blir altså lik null, dvs. ingen elektrisk ledningsevne.

- b) Hva er den totale admittansen til parallellkoblingen i figuren over? Oppgi både modul og fasevinkel.

$$\text{Admittans } Y = \frac{1}{R} - j \frac{1}{2\pi f L} = 0,0100 - j3,2 \cdot 10^{-3} \text{ [S]}$$

$$\text{Modul } |Y| = \sqrt{(0,0100)^2 + (3,2 \cdot 10^{-3})^2} = 0,0105 \text{ [S]}$$

$$\text{Fasen } \varphi = \text{atg}\left(\frac{-3,2 \cdot 10^{-3}}{0,0100}\right) = -17,7^\circ$$

- c) I boligen måles den totale strømmen i kretsen, og det er denne vi betaler for. Vi kan likevel bare nyttegjøre oss av realdelen av strømmen, altså den vi bruker når vi for eksempel beregner effekten. Med de komponentverdiene som er gitt tidligere i oppgaven, beregn i prosent hvor mye vi betaler for mye på strømregningen.

Siden strømmen er proporsjonal med admittansen, holder det at vi ser på forholdet mellom admittansene med og uten spolen:

$$\rightarrow \text{Betalers } \frac{0,0105 - 0,0100}{0,0100} \cdot 100\% = 5\% \text{ for mye}$$

- d) Du ønsker å gjøre noe med dette og tenker at du kan koble en komponent i parallell med de to andre komponentene i figuren, for å fjerne den reaktive (imaginære) strømmen i kretsen. Hva slags komponent vil du velge, og hvilken verdi må den ha?

Her vil en løsning være å koble en kondensator i parallell for å redusere susceptansen til null. Vi ser fra delspørsmål a) at kondensatoren må ha samme susceptansverdi som spolen, slik at:

$$C = \frac{B}{2\pi f} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \approx 1 \cdot 10^{-5} = 10 \mu\text{F}$$

## Oppgave 2

To like store ladninger befinner seg i ro på x-aksen og i avstand  $a$  på hver side av origo.

- a) Hvor stor kraft virker på hver av ladningene når ladningene har størrelse  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  og avstanden  $a = 0,37 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Tomromspermittiviteten  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ .

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2a)^2} \approx 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

hvor  $F_x$  er kraften i positiv x-retning på ladningen som ligger i  $(a,0)$ . Kraften på ladningen i  $(-a,0)$  er  $-F_x$ .

- b) Ladningene sitter på partikler med masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  (protoner). Hvor stor blir akselerasjonen i første øyeblikk dersom partiklene slippes fri?

$$F_x = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} \approx 2,5 \cdot 10^{19} \text{ m/s}^2$$

- c) Vi tenker oss igjen at ladningene ligger i ro slik som i første del av oppgaven. To like, men negative ladninger med samme absolutte størrelse som de positive ladningene befinner seg i ro i punktene  $(0,y)$  og  $(0,-y)$  på y-aksen. Hvor stor kraft virker på hver av partiklene uttrykt ved størrelsene  $e$ ,  $a$  og  $y$ ?

På grunn av symmetrien blir det bare en kraft langs y-aksen på de negative ladningene.

Hvis avstanden mellom en positiv og en negativ ladning er  $r = \sqrt{a^2 + y^2}$ , blir kraften på

$$\text{ladningen i } (0,-y): F_y = \left( \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 y}{r^2 r} \right) - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2y)^2} \right) \quad \text{og} \quad F_x = 0$$

- d) Forklar med ord hvordan kraften på de negative ladningene varierer når ladningene føres utover fra en avstand  $y \ll a$  til  $y \gg a$ . Forklar at det må være en verdi for  $y$  hvor kraften på de negative ladningene er null, og regn ut hvor dette punktet er uttrykt ved størrelsen  $a$ .

Når  $y \ll a$  domineres kreftene av frastøting mellom de negative ladningene og  $F_y < 0$ . Når  $y \gg a$  "ser" de negative ladningene i hovedsak de to positive ladningene og  $F_y > 0$ . Siden kraften varierer kontinuerlig må det være et punkt hvor  $F_y = 0$ .

Fra c) følger at  $F_y = 0$  når:

$$\frac{2y}{r^3} = \frac{1}{(2y)^2} \Rightarrow 8y^3 = r^3 \Rightarrow 2y = r \Rightarrow 4y^2 = a^2 + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}a$$

### Oppgave 3

En lang solenoide (spole) med 1500 viklinger per meter fører strømmen  $I = 20 \text{ A}$ .

a) Finn størrelsen på magnetfeltet inne i solenoiden når spolen er fylt med luft.

Ved å bruke Amperes lov finner vi at  $B = \mu n I$  i en spole, hvor  $\mu$  er magnetisk permeabilitet,  $n$  er antall viklinger pr. meter og  $I$  er strømmen. Vi får da:

$$B = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1500 \cdot 20 = 3,77 \cdot 10^{-2} \text{ [T]}$$

b) Finn størrelsen på magnetfeltet når rommet inne i solenoiden er fylt med flytende oksygen, mens strømmen i viklingene er den samme. (Magnetisk susceptibilitet for flytende oksygen er  $\chi_m = 3,5 \cdot 10^{-3}$ .)

Permeabiliteten blir nå  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ , slik at vi får:

$$B = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} (1 + 3,5 \cdot 10^{-3}) \cdot 1500 \cdot 20 = 3,78 \cdot 10^{-2} \text{ [T]}$$

### Oppgave 4

Magnetfeltet 40 cm fra en uendelig lang, rett leder hvor det går en likestrøm på 2 A, er  $1 \mu\text{T}$ .

a) Ved hvilken avstand er det  $0,1 \mu\text{T}$ ?

Siden  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  så vil feltet være en tidel ved ti ganger så stor avstand, altså 4 meter.

b) De to lederne i en lang, rett "skjøteledning" (kabel) fører på et tidspunkt begge en strøm på 2 A, men i motsatt retning. Avstanden mellom lederne er 3 mm. Finn magnetfeltet i en avstand på 40 cm fra midten av skjøteledningen, i samme plan som lederne ligger i. (De to lederne ligger ved siden av hverandre inne i kabelen).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi} \left( \frac{1}{0,3985} - \frac{1}{0,4015} \right) = 7,50 \text{ [nT]}$$

c) Ved hvilken avstand er feltet én tidel så stort?

Hvis  $r$  er avstanden fra midten av skjøteledningen til det aktuelle punktet og  $2d = 3$  mm er avstanden mellom lederne, så har vi at:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{r-d} - \frac{1}{r+d} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2d}{r^2 - d^2}$$

Løser vi denne mhp.  $r$ , så får vi at  $r = \underline{1,26 \text{ m}}$

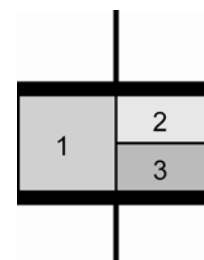
d) Senterlederen i en koaksialkabel fører 2 A i én retning, og skjermen rundt fører 2 A i motsatt retning. Hvordan vil magnetfeltet være i punkter utenfor kabelen? (En koaksialkabel har to ledere. Den ene ligger som en tråd i midten og den andre som en strømpe rundt. Det er isolasjon mellom disse to lederne. Se figuren.)



Kabelen produserer ikke noe magnetfelt eksternt, siden en Ampere-vei rundt kabelen vil omslutte en totalstrøm som er lik null (to like strømmer i hver sin retning).

### Oppgave 5

En platekondensator er konstruert ved å plassere tre dielektriske materialer mellom to metallplater, som vist i figuren til høyre. Alle de tre materialene er like brede og materialene 2 og 3 er halvparten så høye som materiale 1. Vi antar at avstanden mellom platene er mye mindre enn platenes andre dimensjoner (bredde  $\times$  lengde = areal), slik at vi kan se bort fra eventuelle kanteffekter.



a) Finn kondensatorens kapasitans uttrykt ved platenes areal  $A$ , platenes avstand  $d$  og de tre materialenes relative permittivitet;  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  og  $\epsilon_3$ .

Kapasitansen vil være som om vi hadde kondensator 1 i parallell med en seriekobling av kondensatorene 2 og 3, altså tre diskrete kondensatorer koblet sammen.

$$C_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 \frac{A}{2d} ; \quad C_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 \frac{A}{d} ; \quad C_3 = \epsilon_3 \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\text{Seriekoblingen av kondensatorene 2 og 3 gir: } C_s = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

$$\text{Total kapasitans blir da: } C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \left( \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3} \right)$$

b) Beregn denne kapasitansen når  $A = 1 \text{ cm}^2$ ,  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_1 = 4,9$ ,  $\epsilon_2 = 5,6$  og  $\epsilon_3 = 2,1$

Med de oppgitte verdiene blir  $C = \underline{1,76 \text{ pF}}$

- c) Hvis de tre materialene skulle erstattes av ett homogent materiale, hvilken relativ permittivitet måtte dette materialet hatt dersom kapasitansen skulle bli den samme som under punkt b)?

$$\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 1,76 \text{ pF} \quad \text{gir at } \epsilon_r = \underline{4,0}$$

- d) Tenk deg at du har en søster på 17 år som går i videregående skole. Hvordan ville du forklare for henne hva relativ permittivitet er?

Her er det mange muligheter og ikke noe absolutt fasitsvar. Man kan snakke om et materiales evne til å la seg elektrisk polarisere, ladninger som er bundet men som kan bevege seg litt, dipoler som innretter seg i feltet, osv.

## Oppgave 6

- a) Skriv opp likningen som vi kaller Amperes lov. Hva kan vi bruke den til og hvilke geometriske forutsetninger må være til stede for at vi kan ha nytte av den?

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_i$  kan vi bl.a. bruke til å beregne magnetisk felt (flukstetthet) som skyldes kjente elektriske strømmer. Trikket ligger i å velge en integrasjonsvei som sammenfaller helt eller delvis med en magnetisk feltlinje. Eksempler er felt rundt en rett strømførende leder, hvor feltlinjene blir sirkulære og venstre side i uttrykket blir lik  $B \cdot 2\pi l$ . Eventuelt kan man velge en amperevei hvor deler av integrasjonsveien er slik at feltet enten er lik null, eller står ortogonalt på. Eksempel her er beregning av feltet inne i en spole.

- b) Når vi sammenligner elektriske og magnetiske feltlinjer peker vi ofte på én vesentlig forskjell. Hva er det? Forklar.

Magnetiske feltlinjer danner alltid lukkede sløyfer, noe som bl.a. medfører at det ikke eksisterer magnetiske monopoler.