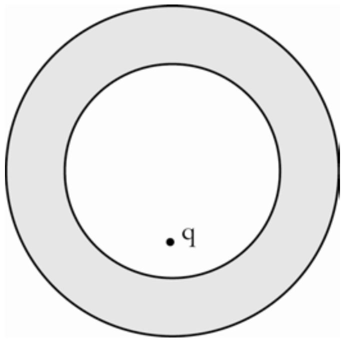
Løsningsforslag

FY101 – Elektromagnetisme, torsdag 6. februar 2003

Ved sensurering vil alle delspørsmål i utgangspunktet bli gitt samme vekt (uavhengig av oppgave-nummer), men vi forbeholder oss retten til justeringer. I løsningsforslaget er bit for bit av oppgaveteksten gitt i kursiv, etterfulgt av en mulig løsning. Det tas forbehold om feil.

Oppgave 1

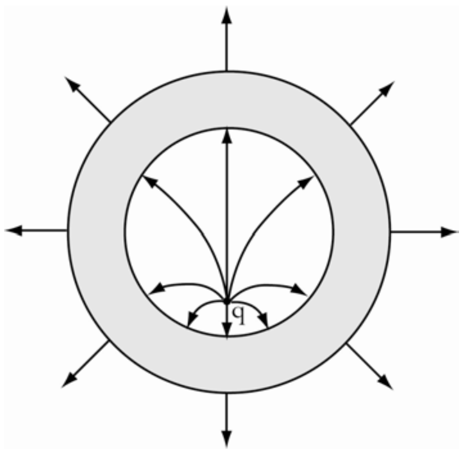
Figuren viser et snitt gjennom en elektrisk ledende kule med et hulrom. I hulrommet er det plassert en punktladning q. Kula er nøytral, slik at systemets nettoladning er q.



a)

- *Beskriv hvordan ladningen i lederen vil være fordelt dersom systemet er i elektrostatisk likevekt.*
- *Skisser feltlinjer for det elektrostatiske feltet* ***E****.*
- *Hva blir* ***E*** *utenfor kula?*

Ved elektrostatisk likevekt er **E** = 0 inne i lederen. Ved å legge en Gaussflate rett innenfor indre overflate av metallet, finner vi at vi må ha en ladning -*q* langs metallets inder overflate. Siden vi har null felt inne i lederen vil denne ladningen være mest konsentrert i nærheten av punktladningen. Feltlinjene vil stå normalt på metallet og være tettest der det er mest ladning (se figuren). Siden nettoladningen i metallet skal være null, må vi ha en ladning +*q* på ytre overflate av metallet. Fra gauss' lov har vi at **E** utenfor kula er gitt ved:



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

hvor $\hat{\mathbf{r}}$ er enhetsvektor med retning ut fra kulas sentrum, og *r* er avstanden fra kulas sentrum.

b) I en parallell RL-krets har vi en påtrykt vekselspenning $V = V_{\max}\cos(\omega t)$*. Hva er strømmen gjennom induktansen?*

Vi regner med komplekse tall, og får da at spenningen er gitt ved:

$$V(t) = V_{\max}\cos(\omega t) \rightarrow \mathbf{V} = V_{\max}e^{j\omega t}$$

Spenningen over induktansen er gitt ved påtrykket spenning siden dette er en parallellkrets:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_L\mathbf{Z}_L = \mathbf{I}_L j\omega L$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{V_{\max}e^{j\omega t}}{j\omega L}$$

Vi ser av sammenhengen $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$, at $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$:

$$\mathbf{I}_L = \frac{V_{\max} e^{j\omega t}}{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega L} = \frac{V_{\max}}{\omega L} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Og vi får da at: $I_L(t) = \frac{V_{\max}}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

Vi kan også gi svaret ved hjelp av sinus, siden $\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t)$

c) *Vi har en ideell transformator med en effektiv inngangsspenning $\Delta V_{rms,1} = 230\ \mathrm{V}$ og $N_1 = 600$ viklinger på primærsiden og $N_2 = 6$ viklinger på sekundærsiden. Vi gjør først et eksperiment der vi setter en spiker med meget liten motstand som last i sekundærkretsen. Deretter gjør vi et nytt eksperiment der vi bruker foreleserens finger som last i sekundærkretsen. Selv om foreleseren er nervøs har fingeren hans meget stor motstand. Hva skjer i de to tilfellene? Begrunn svaret.*

Spenningen i sekundærkretsen blir 2,3 V. Strømmen gjennom en spiker med liten motstand blir stor og effekten dermed også stor. Spikeren vil etter hvert smelte. Hvis motstanden i fingeren er stor vil effekten bli liten og foreleseren merker ingen ting.

d) *Du har et batteri og noen resistanser. Er det mulig å lage en kobling hvor du får en potensialforskjell som er høyere enn potensialforskjellen på batteriet (kan du for eksempel få 3 V vha. et 1,5 V batteri og noen resistanser)?*

Nei, det er ikke mulig.

e) *Hvilke faktorer ville være viktige hvis du skulle konstruere en kondensator som var veldig liten og hadde høy kapasitans?*

Momenter som kan nevnes er dielektrikum med høy relativ permittivitet (dielektrisitetskonstant) og høy dielektrisk styrke (tåler stort elektrisk felt før sammenbrudd), og dessuten tilstrebe liten avstand mellom platene og stort areal .

f) *Hva er forskyvningsstrøm og hvordan er denne definert? Vis for en vanlig parallellplatekondensator med antatt homogent elektrisk felt at forskyvningsstrømmen kan ses på som en naturlig fortsettelse av ledningsstrømmen $I = {}^{dq}\!/_{dt}$*

Forskyvningsstrøm er tenkt strøm som oppstår pga tidsvarierende elektrisk felt over kapasitanser. Denne kommer til uttrykk i Ampère-Maxwells lov, og er definert ved:

$$I_d \equiv \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

For en parallellplate-kondensator har vi at $E = Q/\varepsilon_0 A$, og dermed:

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Oppgave 2

En kondensator på 2 nF har en ladning på 5,1 μC ved tiden t_0 = 0. Den lades så ut gjennom en motstand på 1,3 kΩ.

a) *Beregn strømmen gjennom motstanden 9 μs etter at utladningen har startet.*

$$I_0 = \frac{Q}{RC} = 1{,}96 \text{ A}$$
$$I(t) = -I_0 e^{-t/RC} = \underline{\underline{-\,61{,}6 \text{ mA}}}$$

b) *Hva er ladningen på kondensatoren 8 μs etter at utladningen startet?*

$$q(t) = Qe^{-t/RC} = \underline{\underline{0{,}235\ \mu\text{C}}}$$

c) *Hva er den maksimale strømmen gjennom motstanden?*

$$\text{se pkt. a)}\quad I_0 = \frac{Q}{RC} = \underline{\underline{1{,}96 \text{ A}}}$$

Oppgave 3

På et gitt sted er jordas magnetfelt rettet fullstendig vertikalt inn mot jorda og har en verdi på 50 μT. Et proton beveger seg horisontalt mot vest i dette feltet med en hastighet på 6.2 × 10^6 m/s.

a) *Hva er retningen og størrelsen på den magnetiske kraften som feltet utøver på protonet? (Elementærladningen er 1,6 × 10^{-19} C)*

Høyrehåndsregelen gir oss at retningen på kraften er sydover.

$$F_B = qvB\sin\varphi = \underline{\underline{4{,}96 \times 10^{-17} \text{ N}}} \quad \text{siden } \varphi = 90°$$

b) *Hva er radius i sirkelbuen som protonet følger?*

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv^2}{F} = \underline{\underline{1{,}29 \text{ km}}}$$

Oppgave 4

a) *En serie-RCL-krets (motstand, kondensator og spole koblet i serie) påtrykkes en sinusformet spenning $v(t) = 40V \cdot \sin(100t)$. Komponentverdiene L = 160 mH, C = 99 μF og R = 68 Ω. Hva er kretsens impedans?*

$$\omega = 100 \qquad X_L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)} = \underline{\underline{109\ \Omega}}$$

b) Hva er den maksimale strømverdien (peak-verdi)?

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z} = \frac{40\ \text{V}}{109\ \Omega} = \underline{\underline{0{,}367\ \text{A}}}$$

c) Finn de numeriske verdiene for I_{max} , ω og φ i uttrykket $i(t) = I_{\max}\sin(\omega t - \varphi)$

$$\varphi = atg\frac{X_L - X_C}{R} = \underline{\underline{-51{,}3°}}\ ,\ I_{\max} = 0{,}367\ \text{A og}\ \omega = 100$$

d) Vis matematisk at den totale impedansen til en parallellkobling av en ideell kondensator og en ideell spole er uendelig dersom de har samme reaktansverdi.

$$X_L = j\omega L \quad \text{og} \quad X_C = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$$

$$\text{Vektorielt:} \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{0} = \underline{\underline{\infty}}$$

Oppgave 5

a) Magnetfeltet 40 cm fra en lang rett elektrisk leder hvor det går en strøm på 2 A, er 1 µT. Ved hvilken avstand er det 0,1 µT?

Siden $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ så vil feltet være en-tidel ved en avstand som er ti ganger større, altså ved 400 cm.

b) De to (parallelle) lederne i en vanlig skjøteledning fører på et gitt tidspunkt 2 A i motsatt retning (av hverandre). Avstanden mellom lederne er 3 mm. Hva er størrelsen på magnetfeltet 40 cm fra senter av denne lange, rette skjøteledningen i planet som de to lederne ligger i?

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = \underline{\underline{7{,}5\ \text{nT}}}$$

c) I hvilken avstand er feltet en-tidel av denne verdien?

Hvis vi kaller *r* avstanden fra senter av skjøteledningen til det punktet vi ser på utenfor ledningen, og $2d$ = 3 mm avstanden mellom lederne, så får vi:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r-d} - \frac{1}{r+d}\right)$$

Hvis vi løser dette mhp *r* og bruker 0,75 nT for *B*, så får vi $\underline{r = 1{,}26\ \text{m}}$