

Løsningsforslag

FYS 1120 Elektromagnetisme, onsdag 15. desember 2004

Ved sensurering vil alle delspørsmål i utgangspunktet bli gitt samme vekt (uavhengig av oppgavenummer), men vi forbeholder oss retten til justeringer. I løsningsforslaget er bit for bit av oppgaveteksten gitt i kursiv, etterfulgt av en mulig løsning. Det tas forbehold om feil.

Oppgave 1

En kondensator med parallelle plater har kapasitansen $C = 12,5 \text{ pF}$ når volumet mellom platene er fylt med luft. Platene er sirkulære med en radius på 3 cm . Når kondensatoren kobles til et batteri får platene en ladning på $\pm 25 \text{ pC}$.

- a) Mens kondensatoren fortsatt er koblet til batteriet skyves et dielektrikum inn mellom platene. Dette fyller hele volumet mellom platene. Etter dette har platene en ladning på $\pm 45 \text{ pC}$. Hva er dielektrikumets relative permittivitet ϵ_r ? (Relativ permittivitet er det samme som dielektrisitetskonstant.)

Kapasitansen endres med en faktor ϵ_r når dielektrikumet skyves inn. Siden V fortsatt er uendret (batteriet er fortsatt tilkoblet), får vi:

$$\frac{C_{\text{etter}}}{C_{\text{før}}} = \frac{Q_{\text{etter}}}{Q_{\text{før}}} = \frac{45 \text{ pC}}{25 \text{ pC}} = \epsilon_r = \underline{1.8}$$

- b) Hva er potensialforskjellen mellom platene før og etter at dielektrikumet er skjøvet inn?

Platenes areal er $\pi r^2 = \pi(0.03 \text{ m})^2 = 2.827 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ og avstanden mellom platene er derfor:

$$d = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{C} = \frac{(1.00)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.827 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{12.5 \times 10^{-12} \text{ farad}} = \underline{2.00 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

Før dielektrikumet skyves inn, har vi at:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \frac{Q}{V}$$

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_r \epsilon_0 A} = \frac{(25.0 \times 10^{-12} \text{ C})(2.00 \times 10^{-3} \text{ m})}{(1.00)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.827 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = \underline{2.00 \text{ V}}$$

Siden batteriet fortsatt er tilkoblet er potensialforskjellen den samme etter at dielektrikumet er skjøvet inn.

- c) Hva er den elektriske feltstyrken i et punkt midt mellom platene før og etter at dielektrikumet er skjøvet inn?

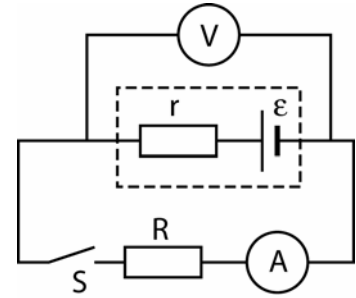
Før dielektrikumet skyves inn,

$$E = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} = \frac{25.0 \times 10^{-12} \text{ C}}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(1.00)(2.827 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = \underline{999 \text{ N/C}}$$

Siden potensialforskjellen er den samme etter at dielektrikumet er skjøvet inn, vil også elektrisk feltstyrke være den samme.

Oppgave 2

Figuren til høyre viser et batteri med elektromotorisk spenning ε og indre resistans r . Batteriet er koblet til en resistans R . Potensialet over batteriet og strømmen gjennom R , måles. Når bryteren S er åpen viser voltmeteret $3,06\text{ V}$. Når bryteren er lukket synker verdien på voltmeteret til $2,91\text{ V}$ og amperemeteret viser $1,68\text{ A}$. Anta at de to instrumentene er ideelle slik at de ikke påvirker kretsen.



- a) Finn den elektromotoriske spenningen ε .

Når S er åpen går det ingen strøm i kretsen og det er følgelig heller ikke noe potensialfall over r . Den elektromotoriske spenningen er derfor $3,06\text{ V}$.

- b) Hva er batteriets indre resistans r ?

Spenningsfallet over r er $3,06\text{ V} - 2,91\text{ V} = 0,15\text{ V}$. Får da at $r = \frac{0,15}{1,68} = \underline{\underline{8,93 \cdot 10^{-2} [\Omega]}}$

- c) Hva er kretsens resistans R ?

$$R = \frac{2,91}{1,68} = \underline{\underline{1,73 [\Omega]}}$$

Oppgave 3

To like store ladninger befinner seg i ro på x -aksen og i avstand a på hver side av origo.

- a) Hvor stor kraft virker på hver av ladningene når ladningene har en størrelse $e = 1,60 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ og avstanden $a = 0,37 \cdot 10^{-10}\text{ m}$. Tomromspermittiviteten $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{ C}^2/\text{Nm}^2$

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{(2a)^2} \approx \underline{\underline{4,2 \cdot 10^{-8}\text{ N}}} \text{ hvor } F_x \text{ er kraften i positiv } x\text{-retning på ladningen som ligger i } (a,0).$$

Kraften på ladningen i $(-a,0)$ er $-F_x$.

- b) Ladningene sitter på partikler med masse $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ (protoner). Hvor stor blir akselerasjonen i første øyeblikk dersom partiklene slippes fri?

$$F_x = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} \approx \underline{\underline{2,5 \cdot 10^{19}\text{ m/s}^2}}$$

- c) Vi tenker oss igjen at ladningene ligger i ro slik som i første del av oppgaven. To like, men negative ladninger med samme absolutte størrelse som de positive ladningene befinner seg i ro i punktene $(0,y)$ og $(0,-y)$ på y -aksen. Hvor stor kraft virker på hver av partiklene uttrykt ved størrelsene e , a og y ?

Her er det kanskje litt uklart hva som menes i oppgaven, og det er greit å bare regne ut kraften på de negative ladningene. På grunn av symmetrien blir det bare en kraft langs y -aksen på de negative ladningene. Hvis avstanden mellom en positiv og en negativ ladning er $r = \sqrt{a^2 + y^2}$, blir kraften på ladningen i

$$(0,-y): F_y = \left(\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 y}{r^2 r} \right) - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2y)^2} \right) \quad \text{og} \quad F_x = 0$$

- d) Forklar med ord hvordan kraften på de negative ladningene varierer når ladningene føres utover fra en avstand $y \ll a$ til $y \gg a$. Forklar at det må være en verdi for y hvor kraften på de negative ladningene er null, og regn ut hvor dette punktet er uttrykt ved størrelsen a .

Når $y \ll a$ domineres kreftene av frastøting mellom de negative ladningene og $F_y < 0$. Når $y \gg a$ "ser" de negative ladningene i hovedsak de to positive ladningene og $F_y > 0$. Siden kraften varierer kontinuerlig må det være et punkt hvor $F_y = 0$.

Fra c) følger at $F_y = 0$ når:
$$\frac{2y}{r^3} = \frac{1}{(2y)^2} \Rightarrow 8y^3 = r^3 \Rightarrow 2y = r \Rightarrow 4y^2 = a^2 + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}a$$

Oppgave 4

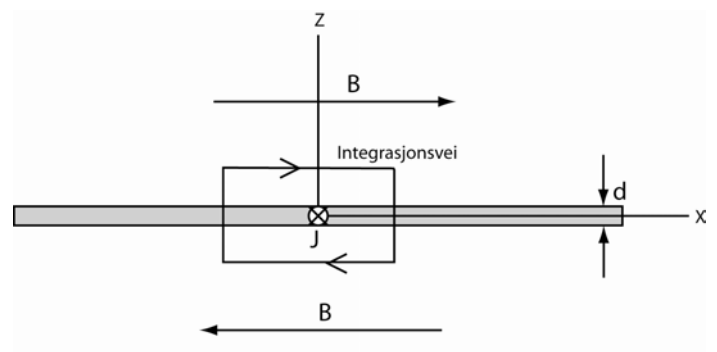
En uendelig stor strømførende kobberplate med tykkelse d ligger i xy -planet. I platen går det en strøm med strømtetthet J parallelt med y -aksen.

- a) Finn størrelse og retning på magnetfeltet på oversiden og undersiden av platen.

Siden platen er uendelig bred i xy -planet må vi anta at feltet er det samme overalt på hver side av platen, og uavhengig av avstanden til platen. Velger vi en rektangulær integrasjonsvei (Ampère-vei) som krysser et tverrsnitt av platen, får vi: $B_l + B_l = \mu_0 J l d$, der l er lengden på de delene av integrasjonsveien som går parallelt med platens overflate (de to sideflatene som står normalt på platens overflate (og dermed \mathbf{B}) bidrar ikke siden $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0$). Vi får altså:

$$B_l + B_l = \mu_0 J l d \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{\mu_0}{2} J d}},$$

hvor feltet peker i positiv x -retning over platen (positiv z) og negativ x -retning under platen (negativ z), slik figuren viser.



Vi tenker oss nå en liknende plate parallell med den første og i høyden h over denne. Strømtettheten er den samme men i motsatt retning.

- b) Finn magnetfeltet mellom og utenfor platene.

Ved å summere bidragene fra de to platene ser vi at:

$\mathbf{B} = \mu_0 J d$ mellom platene (positiv x -retning).

$\mathbf{B} = 0$ utenfor platene.

- c) Finn det magnetiske trykket (kraft per flateenhet) mellom platene.

Kraften på en leder med lengde l i et magnetfelt \mathbf{B} er: $\mathbf{F} = I l \times \mathbf{B}$. Vi har en frastøtende kraft

mellom platene, jfr. retningen på kraften mellom to parallelle ledere. Kraften på en bredde Δx med strømstyrke

$$\Delta I = Jd\Delta x \text{ blir: } \Delta F = \Delta I l B = (Jd\Delta x) l \frac{\mu_0}{2} Jd$$

$$\text{Dette svarer til et magnetisk trykk på platene: } p_m = \frac{\Delta F}{l\Delta x} = \frac{\mu_0}{2} (Jd)^2$$

Oppgave 5

Ved en impedansmåling på et biologisk materiale måles det $50 \text{ k}\Omega$ og en fasevinkel på -37° .

a) Hva er den elektriske admittansen?

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{50000\Omega} = \underline{\underline{20\mu S}} \quad \text{Fasen } \varphi_Y = -\varphi_Z = 37^\circ$$

b) Hva er konduktansen og susceptansen?

$$G = Y \cdot \cos \varphi_Y = 20 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot \cos(37) = \underline{\underline{16\mu S}}$$

$$B = Y \cdot \sin \varphi_Y = 20 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot \sin(37) = \underline{\underline{12\mu S}}$$

c) Har materialet kapasitive eller induktive egenskaper i denne målingen?

Siden susceptansen er positiv, så har materialet kapasitive egenskaper. (Husk: $B = \omega C$).