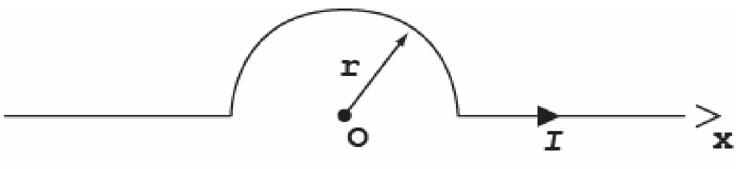
Eksamen i FYS1120 Elektromagnetisme
Fredag 15. desember 2006
Løsningsforslag

Oppgave 1

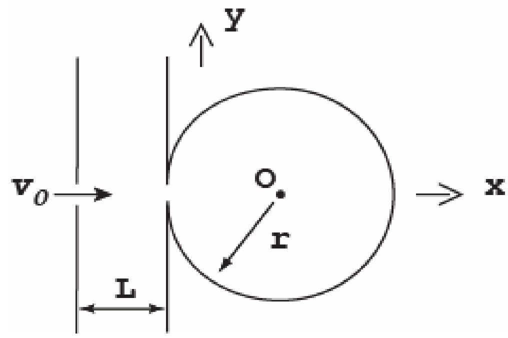
a) *Anta en lang, tynn leder som består av tre deler som er koblet sammen slik som vist i figuren under. Den ene delen strekker seg fra x = -∞ til x = -r og den andre fra x = r til x = ∞. Disse to delene er koblet sammen ved hjelp av en halvsirkelformet leder med sentrum i origo (O på figuren) og med utstrekning fra x = -r til x = r. Det går en strøm I i lederen. Angi styrken og retningen på magnetfeltet i origo.*



Se kap. 28.5 i boka hvor et liknende eksempel er beskrevet.

B er vinkelrett på papirets plan, $B = \frac{1}{2}\frac{I\mu_0}{2R}$, en ekstra ½ fordi vi kun har halvsirkel.

b) *Anta at vi har et homogent magnetfelt* **B** *i en lang, sylindrisk spole med radius r og akse parallell med z-aksen. Magnetfeltet peker i positiv z-retning. Utenfor spolen er det plassert to store plater med en avstand L. Platene ligger parallelt med y-z-planet (se figuren under). I den venstre platen er det et hull ved posisjonen x = -(r+L). Gjennom hullet passerer det en ladd partikkel (med ladning q og masse m) med hastighetsvektor* $\mathbf{v_0}$ *parallelt med x-retning. I den andre platen er det et tilsvarende hull ved x = -r, hvor partikkelen passerer inn i spolen. Hva må potensialforskjellen V mellom platene være for at partikkelen skal forlate spolen ved posisjonen y = -r? Diskuter polariteten for det elektriske feltet med hensyn til verdien av* $\mathbf{v_0}$.



Krav: $r = \frac{mv}{qB}$, hvor $v = \sqrt{{v_0}^2 \pm \frac{2qEL}{m}}$, hvor E L = V er spenningen mellom platene.

± refererer til de to polaritetene for det elektriske feltet.

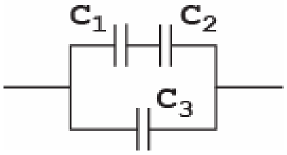
Herav får vi: $r = \frac{m}{qB}\sqrt{v_0^2 \pm 2\frac{q}{m}EL}$ eller $V = \pm EL = \frac{m}{2q}\left[\left(\frac{rqB}{m}\right)^2 - v_0^2\right]$

For små v_0 (f.eks. $v_0 = 0$) må vi akselerere partikkelen, for store v_0 må man deselerere. Kritisk utgangshastighet er $v_0 = q$ B r/m, her er E = 0 korrekt. Med den gitte retning av B, må partikkelen ha positiv ladning for å gå ut av solenoiden i y = -r.

Oppgave 2

a) *Gitt en kuleformet (sfærisk) metalloverflate med total ladning Q og radius a. Bestem størrelsen og retning for det elektriske feltet. Bestem potensialforskjellen mellom overflaten og et punkt som er uendelig langt borte, det vi si ved $r \to \infty$. Hva er kulas kapasitans i forhold til en tilsvarende overflate ved $r \to \infty$?*

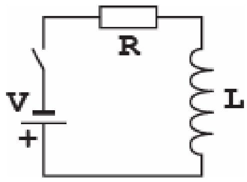
$E(a) = Q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$, $V(a) = -Q/(4\pi\varepsilon_0 a)$, $C = Q/V(a)$ gir $C = 4\pi\varepsilon_0 a$



b) *Hvilken enkel kapasitans C kan erstatte kombinasjonen av C_1, C_2 og C_3 i figuren til høyre?*

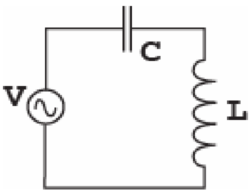
$C = C_3 + C_1C_2 / (C_1 + C_2)$

Oppgave 3



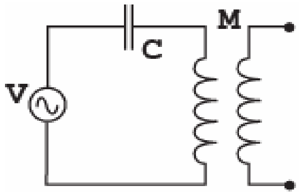
a) *Anta en elektrisk krets som består av et batteri, en motstand (resistans) R og en spole (selvinduktans) L, som vist i figuren til høyre. Bryteren lukkes ved tiden t = 0. Gitt batterispenningen V, bestem tidsforløpet av strømmen I = I(t) for t > 0. Anta videre at R = 5 kΩ og L = 2 mH. Bestem tiden t når strømmen I har nådd halvparten av sin asymptotiske (maksimale) verdi.*

$I(t) = I_0(1-\exp(-t/T))$, med $I_0 = V/R$, og $T = L/R = 2\text{mH}/5\text{k}\Omega = 0{,}4\cdot10^{-6} = 0{,}4\ \mu\text{s}$
$I = \frac{1}{2} I_0$ for $\frac{1}{2} = \exp(t/T)$, eller $t = T\cdot\ln 2 = 0{,}28\ \mu\text{s}$.



b) *Kretsen endres litt slik at den består av en kondensator (kapasitans) C og en spole (selvinduktans) L som vist i figuren til høyre. Batteriet er byttet ut med en spenningskilde som gir ut en spenning $V = V_0 \dfrac{t}{T}$ for t > 0, hvor V_0 og T er konstante verdier. Skriv opp differensiallikningen for systemet. Vis at likningen har løsninger på formen $I(t) = K\left[1-\cos(\omega t)\right]$ og uttrykk K og ω ved V_0, C, L og T.*

$V_0\, t/T = Q/C + L\, dI/dt$, eller $V_0/T = I/C + L\, d^2I/dt^2$. Med $I(t) = K(1-\cos(\omega t))$, har vi $dI/dt = K\omega \sin(\omega t)$, $d^2I/dt^2 = K\omega^2 \cos(\omega t)$, hvorav etter innsettelse: $K = V_0 C/T$ og $\omega = 1/\sqrt{LC}$.



c) *Vi erstatter så spenningskilden med en ny spenningskilde som gir ut en harmonisk varierende spenning $V = V_0\cos(\omega t)$. Beregn den harmonisk varierende strømmen i kretsen. Ved siden av spolen plasserer vi en ny spole slik at den gjensidige induktansen er M. Anta at M er gitt. Beregn spenningen (fortegn er irrelevant) mellom de to kontaktpunktene på den andre spolen (se figuren til høyre). Forusett at $\omega^2 \neq 1/(LC)$ og at L er den samme som i forrige delspørsmål.*

Nå er $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, og $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, med $I_0 = V_0 / (\omega L - 1/(\omega C))$.

Ved gjensidig induktans har vi ε_2 = - M dI_1/dt. Da vi ikke har belastning på sekundærsiden, induseres det ingen strøm herfra på primærsiden, hvoretter ε_2 = - M I_0 cos(ωt).

Oppgave 4

a) *To små plastkuler har positiv ladning. Når de er 15,0 cm fra hverandre virker det en frastøtende kraft mellom dem på 0,220 N. Hva er ladningen på hver av kulene dersom den ene kula har fire ganger så mye ladning som den andre?*

$$F = 0.220\ \text{N} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q^2}{(0.150\ \text{m})^2} \Rightarrow q = \sqrt{1.375\times10^{-13}\ \text{C}^2} = 3.71\times10^{-7}\ \text{C}$$

Så den ene ladningen er 3.71×10^{-7} C, og den andre er 1.484×10^{-6} C.

Oppgave 5

a) *En motstand R = 10 kΩ er koblet i parallell med en kondensator C = 500 pF. Hva er den totale impedansen ved frekvensen f = 300 kHz? Oppgi både modul (absoluttverdi av impedansen) og fasevinkel.*

Enklest å starte med admittans siden det er en parallellkobling:

$$Y = \frac{1}{R} + j(2\cdot\pi\cdot f\cdot C) = 10^{-4} + j9{,}4\cdot10^{-4}$$

$$|Y| = \sqrt{(10^{-4})^2 + (9{,}4\cdot10^{-4})^2} = \underline{9{,}5\cdot10^{-4}}$$, altså <u>950 μS</u>

Fasen $\varphi_Y = atg\left(\frac{9{,}4\cdot10^{-4}}{10^{-4}}\right) = atg(9{,}4) = \underline{83{,}9^\circ}$

Vi får da: Impedans (modul) $|Z| = \frac{1}{|Y|} = \underline{1053\,\Omega}$

Fasen $\varphi_Z = -\varphi_Y = \underline{-83{,}9^\circ}$

b) *Hva er kretsens konduktans G og susceptans B?*

Se første del av svaret på a). G = <u>100 μS</u> og B = <u>940 μS</u> (husk at Y = G + jB)

c) *Vi påtrykker en spenning på 10 V rms, 300 kHz over denne parallellkoblingen. Hva blir midlere avgitt effekt i kretsen?*

$$P = UI\cos\varphi = \frac{U^2}{Z}\cos\varphi = U^2 Y\cos\varphi = U^2 G = (10)^2\cdot10^{-4} = 0{,}01$$, altså <u>10 mW</u>