Løsningsforslag
FYS 1120 Elektromagnetisme
Konteeksamen januar 2006

Det tas forbehold om feil

Oppgave 1

a) *Forklar hvorfor det elektriske feltet inne i en leder er null ved elektrisk likevekt. Vis at nettoladningen q er fordelt på lederens overflate.*

Ved elektrisk likevekt har vi at $\vec{E}=0$ i en leder. Dersom $\vec{E}\neq 0$ virker det en kraft $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$ på de frie elektronene som ville gitt opphav til en strøm. Dette bryter med likevektsantakelsen. Legger vi en Gauss-flate inne i lederen et sted, vil vi fra Gauss lov: $\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q_i}{\varepsilon}$ se at $Q_i=0$ siden $\vec{E}=0$, dvs. ingen netto ladning inne i lederen. Nettoladningen fordeles altså på lederens overflate.

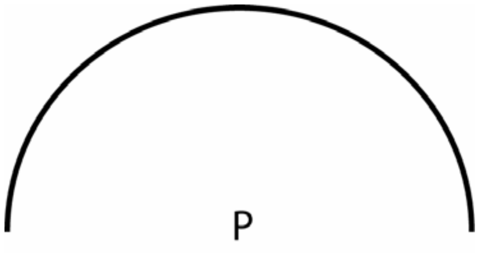
b) *Vis at dersom det i lederen er et ladningsfritt hulrom, vil den totale ladningen på lederens indre overflate (den overflaten som grenser inn mot hulrommet) være lik null ved likevekt.*

Hvis vi legger en Gauss-flate rundt hulrommet inne i lederen, vil vi innenfor Gauss-flaten ha lederen med $Q_i=0$ som vist i ovenfor og et ladningsfritt hulrom med $Q_{hul}=0$. Den totale ladningen innenfor Gauss-flaten blir da $Q=Q_i+Q_{hul}=0$, dvs. ladningen på lederens indre overflate er lik null.

c) *Dersom en positiv punktladning $+q$ plasseres i hulrommets sentrum, hva blir den totale ladningen på lederens indre og ytre overflater? Begrunn svaret.*

Med den samme Gauss-flaten som i forrige punkt, vil fortsatt totalladningen innenfor måtte være lik null. Den må også være null i metallet ved likevekt og vi må derfor ha en ladning –q på lederens indre overflate. Siden $\vec{E}=0$ i lederen og nettoladning på lederen fortsatt er null, må ladningn $+$q befinne seg på lederens ytre overflate.

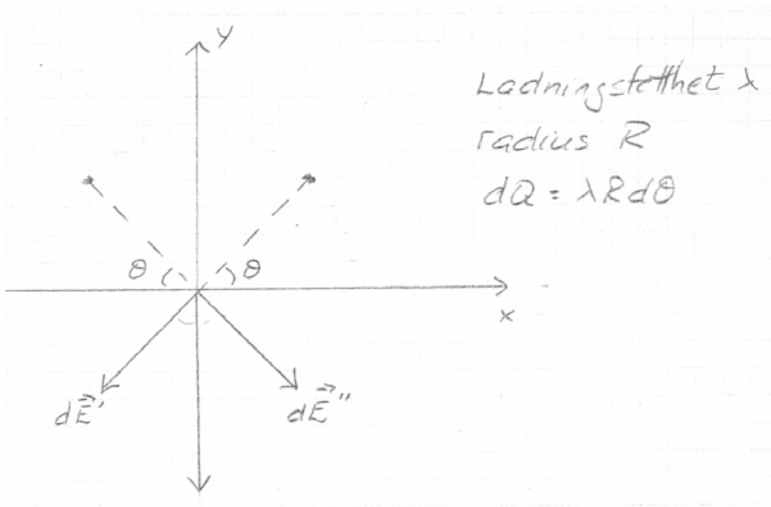
Oppgave 2



a) *Finn det elektriske feltet **E** i sentrum (punkt P i figuren til høyre) av en sirkelbue på 180° med uniform ladningstetthet λ.*

X-komponenten av feltet: $\vec{E}_x = 0$ (pga. symmetri)

Y-komponenten av feltet:



$$d\vec{E}_y = d\vec{E}^I + d\vec{E}^{II} = 2d\vec{E}^I_y = 2\cos\theta\, d\vec{E}$$

$$= \frac{-2dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{E}_y = \frac{-2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{j}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}\,[\sin\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}}}$$

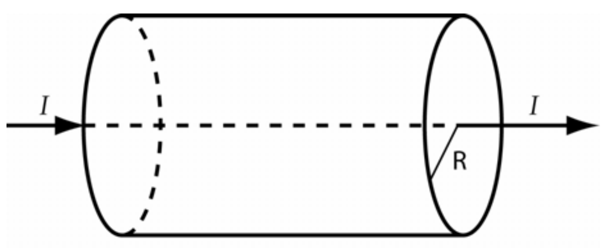
b) *Hva blir potensialet i sentrum av denne sirkelbuen?*

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{R}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dQ = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} d\theta = \underline{\underline{\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}}}$$

Oppgave 3

En lang sylindrisk leder med radius R fører en strøm I som er jevnt fordelt over tverrsnittet av lederen (se figur til venstre).



a) *Bestem magnetfeltet **B** som funksjon av avstanden r fra lederens akse for r<R (inne i lederen) og for r>R (utenfor lederen). Skisser magnetfeltet som funksjon av r.*

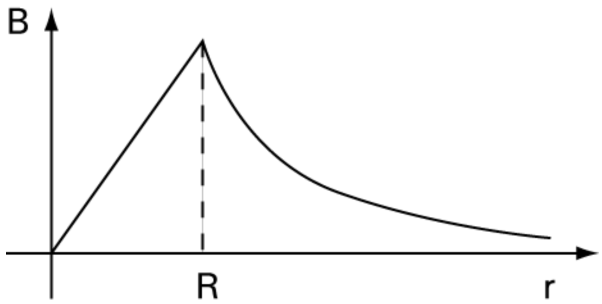
Bruker Amperes lov $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i$ og velger integrasjonsveier (Ampereveier) som konsentriske sirkler rundt lederens lengdeakse.

For r < R:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = B2\pi r = \mu_0 i$$

Strømtetthet $J = \dfrac{I}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad i = J\left(\pi r^2\right) = \dfrac{r^2}{R^2} I$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r^2 I}{2\pi r R^2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}}}$$



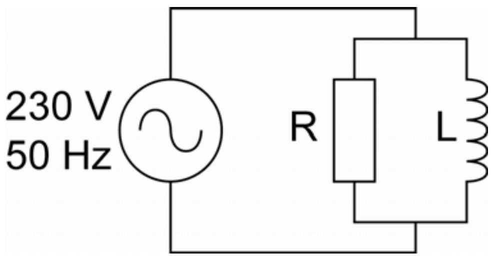
For r > R:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = B2\pi r = \mu_0 i = \mu_0 I$$

$$B = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}}$$

Oppgave 4

Tenk deg at figuren til høyre skjematisk viser det elektriske anlegget i en bolig. Lysnettet leverer en spenning på 230 V rms med frekvens 50 Hz. Den totale belastningen på lysnettet i boligen kan forenkles til en resistans R = 100 Ω i parallell med en induktans (spole) L = 1 H. Vi regner spenningskilden som ideell.



a) *Hva er den elektriske admittansen til en parallellkobling av en induktans (spole) og en kapasitans (kondensator) hvis de har samme susceptansverdi? Begrunn svaret.*

$Y = B_C - B_L = 0$. I admittansplanet vil den kapasitive susceptansen tegnes oppover langs j-aksen og den induktive susceptansen nedover langs –j –aksen. Summen blir altså lik null, dvs. ingen elektrisk ledningsevne.

b) *Hva er den totale admittansen til parallellkoblingen i figuren over? Oppgi både modul og fasevinkel.*

Admittans $Y = \dfrac{1}{R} - j\dfrac{1}{2\pi f L} = 0{,}0100 - j3{,}2\cdot 10^{-3}\ [S]$

Modul $|Y| = \sqrt{(0{,}0100)^2 + \left(3{,}2\cdot 10^{-3}\right)^2} = 0{,}0105\,[S]$

Fasen $\varphi = atg\left(\dfrac{-3{,}2\cdot 10^{-3}}{0{,}0100}\right) = -17{,}7°$

c) *I boligen måles den totale strømmen i kretsen, og det er denne vi betaler for. Vi kan likevel bare nyttegjøre oss av realdelen av strømmen, altså den vi bruker når vi for eksempel beregner effekten. Med de komponentverdiene som er gitt tidligere i oppgaven, beregn i prosent hvor mye vi betaler for mye på strømregningen.*

Siden strømmen er proporsjonal med admittansen, holder det at vi ser på forholdet mellom admittansene med og uten spolen:

→ Betaler $\frac{0{,}0105 - 0{,}0100}{0{,}0100} \cdot 100\% = 5\%$ for mye

d) *Du ønsker å gjøre noe med dette og tenker at du kan koble en komponent i parallell med de to andre komponentene i figuren, for å fjerne den reaktive (imaginære) strømmen i kretsen. Hva slags komponent vil du velge, og hvilken verdi må den ha?*

Her vil en løsning være å koble en kondensator i parallell for å redusere susceptansen til null. Vi ser fra delspørsmål a) at kondensatoren må ha samme susceptansverdi som spolen, slik at:

$$C = \frac{B}{2\pi f} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} \approx 1 \cdot 10^{-5} = 10\ \mu\text{F}$$