Løsningsforslag til eksamen i FYS1120,
14. des. 2007

Oppgave 1

a) *Forklar hvorfor det elektriske feltet inne i en leder er null ved elektrisk likevekt. Vis at nettoladningen q er fordelt på lederens overflate.*

Ved elektrisk likevekt har vi at $\vec{E} = 0$ i en leder. Dersom $\vec{E} \neq 0$ virker det en kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ på de frie elektronene som ville gitt opphav til en strøm. Dette bryter med likevektsantakelsen. Legger vi en Gauss-flate inne i lederen et sted, vil vi fra Gauss lov: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon}$ se at $Q_i = 0$ siden $\vec{E} = 0$, dvs. ingen netto ladning inne i lederen. Nettoladningen fordeles altså på lederens overflate.

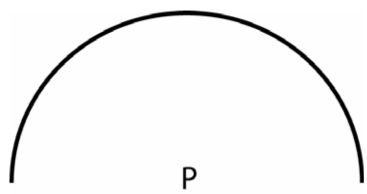
b) *Vis at dersom det i lederen er et ladningsfritt hulrom, vil den totale ladningen på lederens indre overflate (den overflaten som grenser inn mot hulrommet) være lik null ved likevekt.*

Hvis vi legger en Gauss-flate rundt hulrommet inne i lederen, vil vi innenfor Gauss-flaten ha lederen med $Q_i = 0$ som vist i ovenfor og et ladningsfritt hulrom med $Q_{hul} = 0$. Den totale ladningen innenfor Gauss-flaten blir da $Q = Q_i + Q_{hul} = 0$, dvs. ladningen på lederens indre overflate er lik null.

c) *Dersom en positiv punktladning $+q$ plasseres i hulrommets sentrum, hva blir den totale ladningen på lederens indre og ytre overflater? Begrunn svaret.*

Med den samme Gauss-flaten som i forrige punkt, vil fortsatt totalladningen innenfor måtte være lik null. Den må også være null i metallet ved likevekt og vi må derfor ha en ladning −q på lederens indre overflate. Siden $\vec{E} = 0$ i lederen og nettoladning på lederen fortsatt er null, må ladningn +q befinne seg på lederens ytre overflate.

d) *Finn et uttrykk for det elektriske feltet* **E** *i sentrum (punkt P i figuren) av en halvsirkel-formet ladningsfordeling med uniform tetthet λ.*



X-komponenten av feltet: $\vec{E}_x = 0$ (pga. symmetri)

Y-komponenten av feltet:

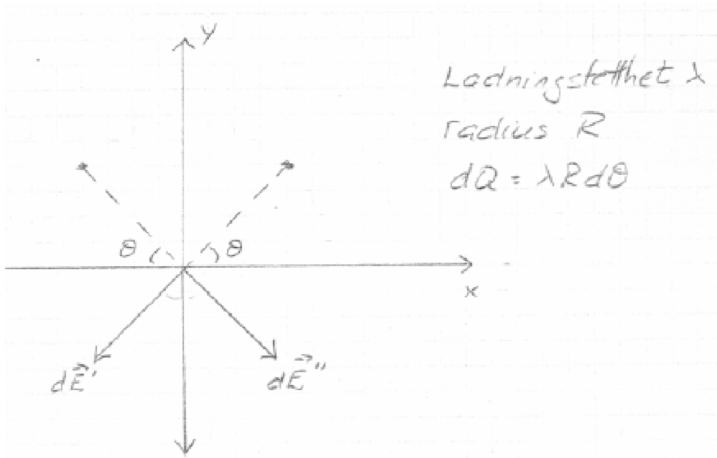
$$d\vec{E}_y = d\vec{E}^I + d\vec{E}^{II} = 2d\vec{E}_y^I = 2\cos\theta \, dE \, (-\vec{j})$$

$$= \frac{-2dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta \, \vec{j}$$

$$\vec{E}_y = \frac{-2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{j}\int_0^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}\,[\sin\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}}}$$



e) Finn potensialet i sentrum av denne sirkelbuen.

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{R}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dQ = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} d\theta = \underline{\underline{\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}}}$$

Oppgave 2

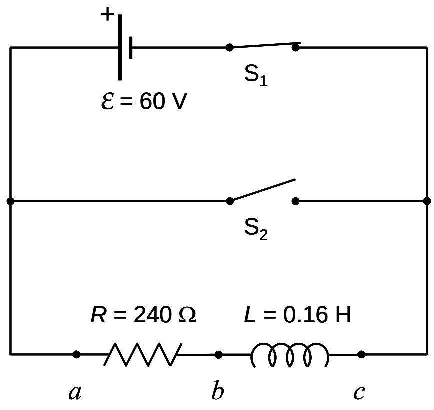
a) Hva er et dielektrikum (dielektrisk materiale), og hvordan påvirkes en kondensator når rommet mellom platene fylles med et dielektrikum.

Et dielektrikum er et materiale som er elektrisk isolerende, men der et elektrisk felt vil flytte på ladningene til en viss grad slik at materialet blir elektrisk polarisert, dvs at ”tyngdepunktet” for positiv og negativ ladning ikke er sammenfallende.
En kondensator med et dielektrikum mellom platene vil øke sin kapasitans med en faktor *K*, som kalles dielektrisitetskonstanten. Tallet *K* er alltid større enn 1, og kan ha verdi opp til over 100.

b) Gi en beskrivelse av de elektromagnetiske feltene som utgjør lys.

Lys er elektromagnetiske bølger, der bølgen består av E- og B-felt som svinger normalt på bølgens forplantningsretning. Vektorfeltene E og B står dessuten 90 grader på hverandre, og deres magnituder har alltid et fast forhold; E/B = c, der c er lysfarten. I vakuum har lysfarten samme verdi for alle frekvenser til den elektromagnetiske bølgen, og er gitt ved $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, der ε_0 og μ_0 er respektivt permittiviteten og permeabiliteten til vakuum.

Oppgave 3



a) Hva er strømmen i resistansen rett etter at bryterne skifter posisjon (S_1 åpnes og S_2 lukkes)?

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{60\text{ V}}{240\ \Omega} = 0.25\text{ A.}$$

b) Sett opp differensial likningen som beskriver strømmen i tiden t > 0, og finn et uttrykk for strømmen I(t).

Kirchhoff's lov gir: $0 = R\,I(t) + L\,I'(t)$,

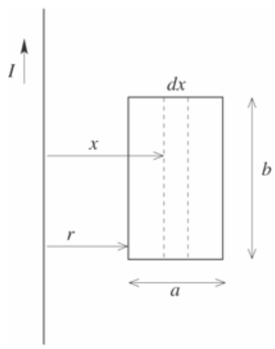
som har løsningen; $I(t) = I_0 e^{-(R/L)t} = 0.25\text{A}\; e^{-t/\tau}$ der $\tau = L/R = 0.67$ ms.

c) Hvor lang tid tar det før strømmen er halvert?
Hva er forskjellen i spenning mellom punktene b og c da?

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} = e^{-t_{1/2}/\tau} \Rightarrow t_{1/2} = -\tau \ln\left(0.5\right) = 0.46\text{ ms.}$$

$$V_{cb} = V_{ab} = R(0.5 I_0) = 30\text{ V.}$$

Oppgave 4



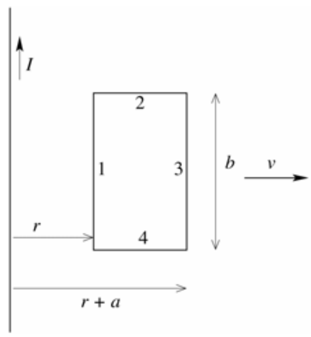
Du skal beregne den induserte elektromotoriske spenningen på to måter.

a) Ved å bruke Faraday's induksjonslov.

Har at $|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|$, og betrakter en smal stripe med bredde dx i avstand x fra strømledningen, der magnetfeltet er $B = \mu_0 I/2\pi x$.
Fluksen gjennom stripearealet er $d\Phi = Bbdx = (\mu_0 Ib/2\pi)\,(dx/x)$.
Fluksen gjennom hele rektangelet er $\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_r^{r+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln(\frac{r+a}{r})$.

Følgelig er $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{-a}{r(r+a)}\;v$ og $|\varepsilon| = \frac{\mu_0 Iabv}{2\pi r(r+a)}$.

b) Ved å bestemme indusert spenning i hver av sidene til rektangelet.



I en rett leder med lengde *l* som beveger seg med fart *v* normalt på et magnetfelt *B* induseres det en spenning, $\varepsilon = Bvl$.
For de 4 sidene har vi;

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} vb,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+a)} vb,$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$$

Her vil ems ε_1 og ε_2 motvirke hverandre, og netto spenning blir

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\mu_0 Ivb}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a}\right) = \frac{\mu_0 Iabv}{2\pi r(r+a)},$$

som er samme svar som i *a)*.

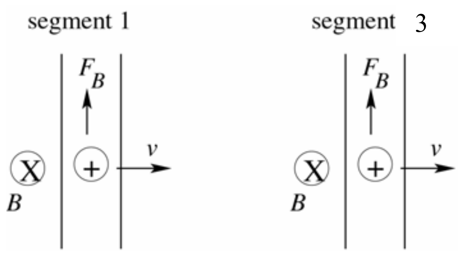
c) Kontroller svaret over opp mot det du forventer i tilfellene der rektangelet er
(i) i ro,
Settes v=0, får vi $\varepsilon = 0$, som er korrekt når det er ingen bevegelse.

(ii) svært smalt ($a \rightarrow 0$) ,
Når $a \rightarrow 0$ vil $\varepsilon \rightarrow 0$, som må være svaret når arealet, og dermed fluksen $\rightarrow 0$.

(iii) langt borte fra strømlederen.
For $r \rightarrow \infty$ får vi igjen $\varepsilon \rightarrow 0$, som må være riktig da B-feltet, og dermed fluksen $\rightarrow 0$.

d) Også retningen på den induserte strømmen (med/mot urviseren) skal bestemmes på 2 måter.
(iv) ved å bruke Lenz' lov,
B-feltet går inn i papirplanet der strømsløyfen er, og fluksen Φ er avtagende. Den induserte strømmen vil søke å opprettholde fluksen, dvs. strømretningen er <u>med</u> urviseren.

(v) betrakte kraften på ladningene i rektangelet.



B-feltet er større ved segment 1 enn ved segment 3, og følgelig er kraften F_B også større i segment 1. Netto kraft på (positive) ladninger vil dermed drive strømmen rundt <u>med</u> urviseren.