FYS1120 Elektromagnetisme, ukesoppgavesett 2

31. august 2014

I FYS1120-undervisninga legger vi mer vekt på matematikk og numeriske metoder enn det oppgavene i læreboka gjør. Det gjelder også oppgavene som blir gitt til eksamen. **Derfor er det viktig at du gjør ukesoppgavene som blir gitt.** Dersom du syns det er vanskelig å komme i gang med dem, eller hvis du ikke syns det er nok oppgaver, så kan du godt gjøre følgende oppgavene fra boka i tillegg. *Fra kapittelet 'Gauss's law' (oppgaver på s. 76 og utover): Exercises 8, 14 og 16.*

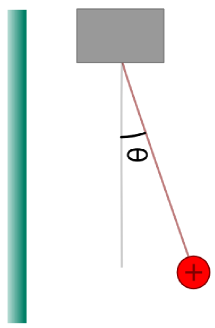
Oppgave 1 Fluks og ladning En punktladning $q_1 = 4.0$ nC ligger på x-aksen der $x = 2.0$ m. En annen punktladning $q_2 = -6.0$ nC ligger på y-aksen der $y = 1.0$ m.

a) En kule med sentrum i origo har radius 0.5 m. Hva er den elektriske fluksen ut av denne kulen?

b) Hva blir fluksen hvis radiusen til kulen er 1.5 m eller 2.5 m?

Oppgave 2 Ladet kule henger i en tråd

En kule med masse m og ladning q henger i enden av en tråd. Ved siden av er det en stor og ladet flate med overflatetetthet σ (ladning per flate). Både flaten og kulen har positiv ladning. Vi antar at kula er i ro og at tyngdekraften virker rett nedover. Finn vinkelen θ.
Hint: Finn først det elektriske feltet fra flaten. Husk også at tyngdekraften på kula er gitt ved $\vec{G} = -mg\vec{j}$.

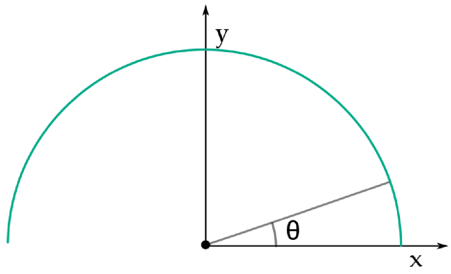


Figur 1: En positiv ladning q henger ved en positivt ladet flate.

Oppgave 3 En ladet halvsirkel

En halvsirkel med radius a og sentrum i origo ligger i første og andre kvadrant i xy-planet, slik som vist i figur 2. Halvsirkelen har en total ladning Q.

a) Finn linjetettheten λ (ladning per lengde) dersom halvsirkelen er *uniformt* ladet. Finn så størrelse og retning til det elektriske feltet i origo.



Figur 2: En halvsirkel i xy-planet med total ladning Q.

b) Vi ser nå på tilfellet der halvsirkelen *ikke* er uniformt ladet. La linjetettheten være gitt ved

$$\lambda(\theta) = \left(\frac{Q}{2a}\right) \sin\theta.$$

Skissér denne ladningsfordelingen og vis at total ladning for halvsirkelen fortsatt er Q.

c) Finn størrelse og retning til det elektriske feltet i origo for dette tilfellet. Hvilken av fordelingene gir størst verdi til det elektriske feltet? Hvorfor har feltet samme retning i begge tilfellene?

Oppgave 4 En ikke-uniform ladningsfordeling

En volumtetthet (ladningsfordeling i rom) gitt ved

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(1 - \frac{r}{R}) & , \quad \text{for} \quad r \leq R \\ 0 & , \quad \text{ellers} \end{cases}$$

der $\rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3}$ er en positiv konstant, og r er den radielle avstanden fra origo i kulekoordinater. Når en ladningsfordeling i rommet kun avhenger av r sier vi at den er *sfærisk symmetrisk*.

a) Finn det eletriske feltet for regionene $r \leq R$ og $r \geq R$. Sjekk at de får samme verdi ved $r = R$. Ville feltet du fant for $r \geq R$ blitt annerledes dersom vi istedet hadde en punktladning i origo?

b) Skissér størrelsen til det elektriske feltet som funksjon av r. Ved hvilken r er størrelsen til det elektriske feltet maksimal? Hvilken verdi har feltet her?

Oppgave 5 En ladet stav

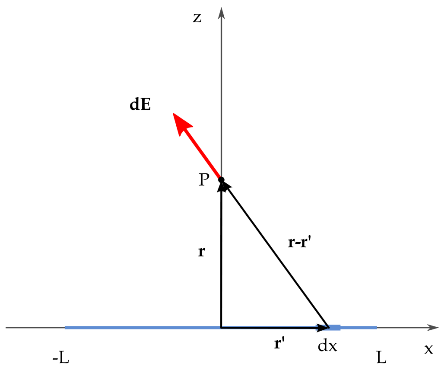
En ladet stav strekker seg fra $-L$ til L på x-aksen med linjetetthet λ. Vi ser situasjonen i figur 3.

a) Punktet P ligger på z-aksen med koordinatene $(0, 0, z)$. Vis at styrken til det elektriske feltet kan skrives som

$$E_z = \frac{2\lambda z}{4\pi\ \varepsilon_0} \int_0^L \frac{1}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}x,$$

med $E_x = E_y = 0$.
Hint: Se på bidragene fra x og $-x$. Er det noe kansellering på gang?

b) Regn ut integralet fra **a)**.
Hint: Prøv substitusjonen $x = z \tan\theta$. Der z er konstant.



Figur 3: En ladet stav langs x-aksen.

c) Hvordan forventer du at feltet vil se ut langt fra staven, dvs. for $|z| >> L$? Ser uttrykket du har for feltet fornuftig ut i denne grensen?

d) Uttrykket du fant i **b)** er kun gyldig langs z-aksen. Hvordan ser feltet ut for en uendelig lang stav ($L \to \infty$)? Når er dette uttrykket gyldig?