FYS1120 Elektromagnetisme

Obligatorisk oppgåve 1 hausten 2015

Innleveringsfrist **17. september kl. 23.59**

Obligar i FYS1120 leverast elektronisk **i PDF-format** *på Devilry* – `http://devilry.ifi.uio.no/`. *Du kan velge om du vil skrive han maskinelt, med til dømes LaTeX, eller skanne handskrivne ark. Skanner finst på bibliotek og terminalstuer.*

Denne obligen er meint som ei øving på og oppfrisking av vektorkalkulus-pensumet vi treng i FYS1120. For å meistre elektromagnetismen er det viktig å ha kontroll på rekneteknikkane. Vi kjem i løp av kurset til å gjere utstrakt bruk av konsept som gradient, divergens og kvervling, samt Gauss' divergensteorem og Stokes' kvervlingsteorem. *Lukke til!*

Oppgåve 1 Gradient, divergens og kvervling

a) Finn gradienten til desse skalarfelta:

(i) $f(x, y, z) = x^2 y$

(ii) $g(x, y, z) = xyz$

(iii) $h(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} e^{r^2}$ *Hint: Bruk at* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, *eller sjå etter formelen for gradient i kulekoordinater i Rottmann.*

b) Finn divergensen og kvervlinga til desse vektorfelta:

(i) $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy, x^2, 0)$

(ii) $\mathbf{v}(x, y, z) = (e^{yz}, ln(xy), z)$

(iii) $\mathbf{w}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

(iv) $\mathbf{a}(x, y, z) = (y^2 z, -z^2 \sin y + 2xyz, 2z \cos y + y^2 x)$

c) Kva vil det seie at eit felt er *konservativt*, matematisk sett? Og kva vil det seie at t.d. eit gravitasjonsfelt er konservativt, fysisk sett? Er det nokon av felta i **b)** som er konservative? Har nokon av dei i så fall noko med **a)** å gjere?

d) Viss me tek divergensen av gradienten til eit skalarfelt f, $\nabla \cdot \nabla f$, så får me eit nytt skalarfelt. Operatoren $\nabla \cdot \nabla$ skriv me ofte ∇^2, og han vert kalla *laplaceoperatoren.*

Bruk laplaceoperatoren på desse skalarfelta:

(i) $j(x, y, z) = x^2 + xy + yz^2$

(ii) $h(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} e^{r^2}$

Oppgåve 2 Vektoridentitetar

La $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ vere tre-dimensjonale vektorar. Vis følgande identitet:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{1}$$

Du kan godt anta at vektorane er på formen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ osb.

Oppgåve 3 Fluksintegral og Gauss' teorem

a) Eit vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (y, x, z - x). \tag{2}$$

Rekn ut fluksen av dette feltet ut av einingskuben, som er gitt ved $x, y, z \in [0, 1]$. *Hint: Berekn fluksen,* $\iint_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA$*, der* $\mathbf{n}$ *er einingsnormalvektoren for flata* A*, for kvar sideflate av kuben og legg saman.*

b) Bruk Gauss' teorem til å berekne den samme fluksen. Sjekk at du får samme svar!

Oppgåve 4 Linjeintegral og Stokes' teorem

Endå eit vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{w}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - y^2 z\mathbf{k}, \tag{3}$$

der $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er einingsvektorene i høvesvis x, y og z-retning. Vi har òg ei *lukka kurve* γ gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

a) Rekn ut divergensen til $\mathbf{w}$.

b) Rekn ut kvervlinga til $\mathbf{w}$.

c) Parametrisér kurva γ som ein vektor $\boldsymbol{\gamma}(t)$, og finn $d\boldsymbol{\gamma}$ uttrykt ved dt.

d) Rekn ut sirkulasjonen C, til $\mathbf{w}$ rundt γ.

e) Bruk Stokes' teorem til å finne sirkulasjonen ved hjelp av kvervlinga til $\mathbf{w}$. Sjekk at du får samme svar!