

# FYS1120: Oblig 2 – Syklotron

Obligatorisk oppgave i FYS1120-Elektromagnetisme gitt ved UiO høsten 2017. Obligen begynner med noen innledende oppgaver som tar for seg partikler i elektrisk og magnetisk felt hver for seg. Deretter følger oppgaver der vi kombinerer elektrisk og magnetisk felt til en syklotron. Til slutt kommer en oppgave om Ampères lov.

## Praktisk informasjon

Innleveringsfristen er **fredag 27. oktober 2017 klokken 23.59**. Besvarelsen leveres i Devilry, som du finner på <https://devilry.ifi.uio.no>. Logg inn med brukenavn og passord fra UiO. Sjekk at du får til å levere i Devilry i god tid før fristen – vi godtar ikke andre leveringsformer.

*Du må gjøre et ærlig forsøk på alle deloppgavene i oppgave 2, 3 og 4 for å få obliken godkjent. Oppgave 1 er en innledende oppgave for å komme i gang. Dere trenger ikke å skrive inn noe fra denne oppgaven i besvarelsen.*

Vi godtar kun ett innleveringsformat:

En *maskinskrevet* rapport i PDF-format. Rapporten skal kun inneholde tekst og figurer – og koden skal være lagt ved separat (i egen fil/egne filer). Du kan velge hvilket programmeringsspråk du vil bruke, og vi kommer ikke til å kjøre koden, bare se på den. Det betyr at alle figurer må være inkludert i rapporten. Rapporten kan du skrive i for eksempel L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X eller Word/OpenOffice – i det siste tilfellet *må* du eksportere dokumentet som PDF.

Felles for begge leveringsformene gjelder følgende: Alle figurer skal ha figurtekst. Det skal være navn og enhet på aksene. Dersom det er flere grafer i samme plott skal de ha forskjellig farge/markør og en tegnforklaring (“legend”).

Det er god skrivetrening å gi korte og konsise svar på alle spørsmål som stilles i oppgavene. Det krever bedre forståelse og oversikt å gi et enkelt svar som allikevel dekker nøyaktig det oppgaven ber om, enn en lang diskusjon som tilfeldigvis også er innom selve svaret. Med mindre noe annet er spesifisert ønsker vi at svar gis med noen få setninger.

Vi oppfordrer dere til å samarbeide, fordi man lærer mye av å diskutere og forklare for hverandre. Sammen vil man også langt lettere finne feil i koden. Hver student skal allikevel *skrive sin egen kode og sin egen rapport* og besvarelsene leveres og vurderes individuelt. Alle skal følge god akademisk praksis og oppgi i rapporten hvem de har samarbeidet med og referere til kilder de har brukt.

Vi forventer at alle deloppgaver er besvart, *og kommer ikke til å godkjenne obliker som mangler deloppgaver*. Med besvart mener vi at du viser at du har gjort et ærlig forsøk på å løse oppgaven. Dersom dere svarer blankt på en oppgave eller skriver kommentarer av typen “dette fikk jeg ikke til”, har ikke den som retter noe annet valg enn å gi null uttelling. Det er ofte helt unødvendig. Dersom du vet at figurene du får er feil, så bør du putte dem inn i rapporten og forklare hvorfor de er feil. Det viser at du har forstått hva som bør forventes, ofte basert på en fysisk eller matematisk innsikt i problemet. Kanskje er det bare en liten detalj som mangler før du får riktig svar. Dersom du etter en utledning får et svar som ikke fungerer eller virker galt bør du skrive det! Gjør du en dimensjonsanalyse og viser at svaret ditt har

feil enheter viser du at du kan tenke som en fysiker, og du kan få en del poeng selv om du ikke klarer å lokalisere feilen.

I arbeidet med obliger har dere i tillegg flere muligheter til å søke hjelp, og det er derfor ingen grunn til å svare blankt. Snakk med medstudenter eller lærere, og benytt det undervisningstilbudet som gis. Dere er ikke garantert å få til alt, men dere vil nesten helt sikkert bygge opp innsikt i hver oppgave som dere kan putte inn i rapporten.

## Oppgave 1: Partikkel i elektrisk felt – Programkode og verifisering

I denne oppgaven skal du lage et program som lar deg finne banen til en partikkel i et kraftfelt – i dette tilfellet et elektrisk felt. Dette programmet skal utvikles videre i oppgave 2 og 3, der vi tar med magnetfelder. *Vi vil kun at du legger ved den endelige koden fra oppgave 3.* Du trenger heller ikke å skrive noe i besvarelsen om det du har gjort i oppgave 1. Denne oppgaven er kun for å komme i gang. For enkelhets skyld gjør vi tidsintegrasjonen med Euler-Cromers metode. I Euler-Cromers metode brukes den nyeste verdien av hastigheten  $\mathbf{v}$  til å beregne neste verdi av posisjonen  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . For mer informasjon om Euler-Cromers metode anbefaler vi kapittel 4 og 5 fra *Elementary Mechanics Using Python* av Anders Malthé-Sørenssen: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-19596-4>.

- Plasser et elektron (masse  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$  kg og ladning  $-e = -1.60 \times 10^{-19}$  C i et konstant elektrisk felt  $\mathbf{E} = (-5.0 \text{ N C}^{-1}, 0, 0)$ . Velg  $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$  og  $\mathbf{v}(t = 0) = (0, 0, 0)$ . Integrer bevegelsen fra  $t = 0.0$  s til  $t = 1 \mu\text{s}$  både med tidssteg  $\Delta t = 1$  ns og  $\Delta t = 100$  ns.
- Den analytiske løsningen av forrige oppgave er  $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ , der  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ . Plott den analytiske løsningen i samme aksekors som den numeriske løsningen for begge de oppgitte verdiene av  $\Delta t$ . Om du har programmert riktig skal figurene se ut som dem i figur 1.
- Velg så  $\mathbf{E} = (-1 \text{ N C}^{-1}, -2 \text{ N C}^{-1}, 5 \text{ N C}^{-1})$ . Plott  $x(t)$ ,  $y(t)$  og  $z(t)$  i samme aksekors med hver sin farge.
- Vis banen til partikkelen i punktet over i 3D. Tenk gjerne ut en fremstilling som gir et inntrykk av partikkelens akselerasjon. Om du har programmert riktig på de to siste punktene vil figurene dine se ut som dem i figur 2.

## Oppgave 2: Partikkel i magnetisk felt

*Det du gjør herifra skal dokumenteres i besvarelsen (med unntak av koden, der vil vi fortsatt kun ha den endelige koden fra oppgave 3).*

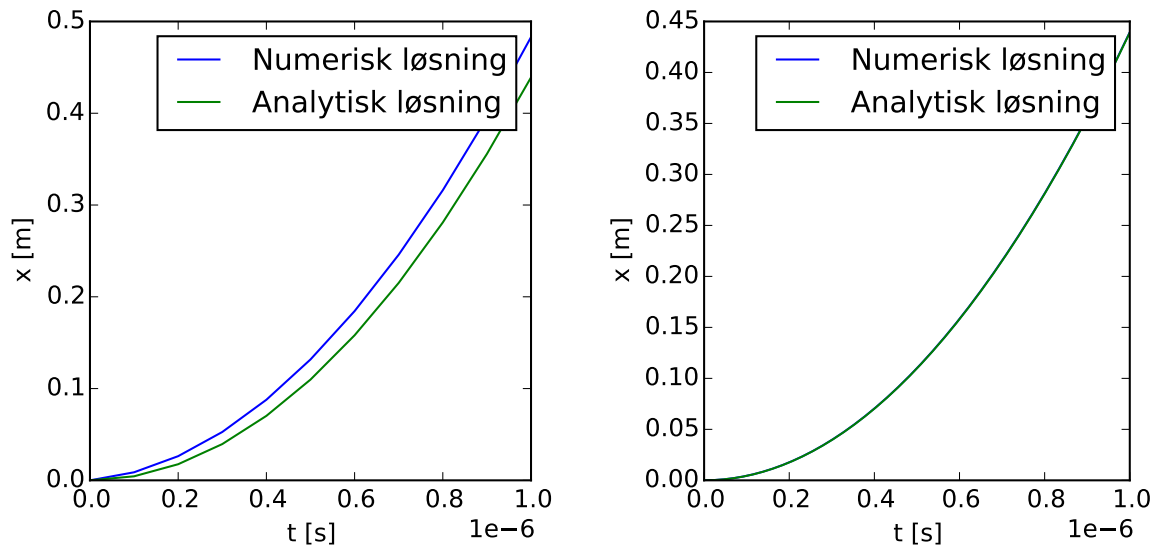
I denne oppgaven bytter vi ut det elektriske feltet med et magnetisk felt  $\mathbf{B}$ . Elektronet påvirkes av en magnetisk kraft

$$\mathbf{F}_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

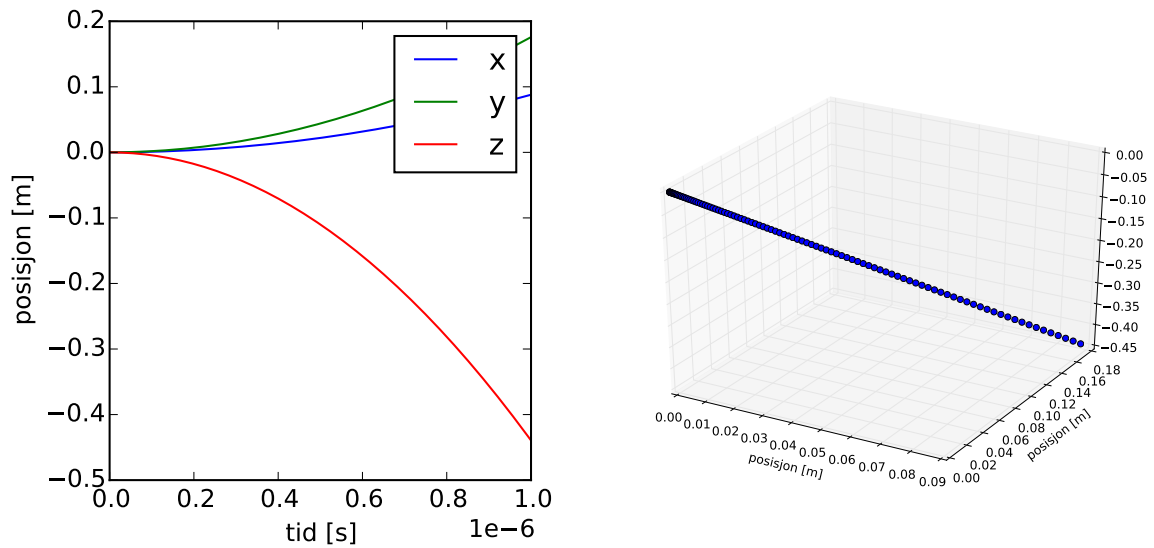
der  $q$  er ladningen og  $\mathbf{v}$  hastigheten til elektronet.

- a) Bruk samme masse og ladning som i oppgave 1, og sett  $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$  og  $\mathbf{v}(t = 0) = (10 \text{ km s}^{-1}, 0, 0)$ . La magnetfeltet være  $\mathbf{B} = (0, 0, 2 \text{ T})$ . Se på bevegelsen fra  $t = 0$  til  $t = 30$  ps med tidssteg  $\Delta t = 1$  fs. Plott  $x(t)$ ,  $y(t)$  og  $z(t)$  i samme aksekors med hver sin farge. Lag et annet plott som viser  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  og  $v_z(t)$ . Ta også med et plott som viser banen til partikkelen i 3D.
- b) Mål omløpstiden  $T$  til partikkelen.
- c) Vis analytisk at syklotronfrekvensen til dette systemet er

$$\omega_c = \frac{qB}{m},$$



Figur 1: Numerisk og analytisk løsning av partikkel i elektrisk felt for  $\Delta t = 100 \text{ ns}$  (til venstre) og  $\Delta t = 1 \text{ ns}$  (til høyre).



Figur 2: Partikkel i elektrisk felt.  $x(t)$ ,  $y(t)$  og  $z(t)$  når  $\mathbf{E} = (1 \text{ N C}^{-1}, 2 \text{ N C}^{-1}, -5 \text{ N C}^{-1})$ .

der  $B = |\mathbf{B}|$ , og bruk dette til å vise at

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Kommenter det numeriske resultatet fra oppgave b).

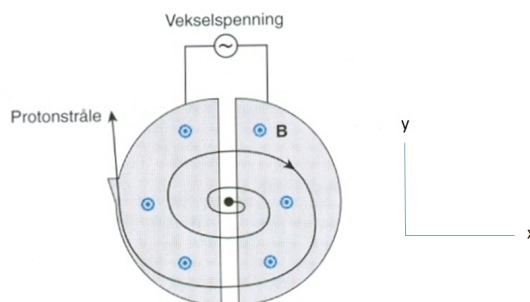
- d) Gå nå tilbake til programmet ditt og endre initialhastigheten til  $\mathbf{v}(t = 0) = (5 \text{ km s}^{-1}, 0, 2 \text{ km s}^{-1})$ . Lag plottet som viser banen til partikkelen i 3D. Sammenlign gjerne med den analytiske løsningen.

### Oppgave 3: Partikkel i syklotron

En syklotron er en partikkelakselerator for ladde partikler. Energi tilføres av et elektrisk felt, mens et magnetisk felt brukes for å holde partiklene inne i syklotronen. En enkel syklotron består av to lukkede metalliske halvsylindere plassert like ved siden av hverandre, som vist i Figur 3. Halvsylindrene, som ofte kalles D-er på grunn av formen, ligger i et konstant magnetfelt vinkelrett på papirplanet. En protonkilde fører protoner inn i området mellom sylindrene, vi skal se på bevegelsen til et slikt proton. Mellom halvsylindrene virker det et oscillerende  $\mathbf{E}$ -felt i  $x$ -retningen. Inne i halvsylindrene er det elektriske feltet lik null. Ved at spenningen over halvsylindrene veksler i takt med syklotronfrekvensen protonene har i  $\mathbf{B}$ -feltet vil de få en akselerasjon hver gang de passerer fra en halvsylinder til den andre. Dermed vil farten og radien øke ved hver passering. Når partikkelbanens radius blir større enn radien i sylindrene forlater partiklene syklotronen.

En partikkel i en syklotron vil kunne oppnå relativistiske hastigheter, og det vil gi relativistiske korreksjoner til banen. Disse skal vi se bort fra i vår modell.

I denne oppgaven skal vi foreløpig anta at vi jobber med en syklotron der  $B$ -feltet kan varieres fra 1 til 2 T og at syklotronspenningen er 50 kV. For at vi skal klare å gjøre beregninger på en vanlig laptop eller skrivebordsmaskin innenfor rimelig tid (under 1 minutt) er vi nødt til å gjøre noen justeringer fra hva som er vanlige dimensjoner på en syklotron. Vi skal derfor anta at partikkelen slippes fri fra syklotronen i en avstand  $r_D = 50 \text{ mm}$  fra sentrum, og at avstanden mellom D-ene i syklotronen, såkalt *valley gap*, er  $90 \text{ }\mu\text{m}$ .



Figur 3: Skisse av en syklotron. Hentet fra [1].

- a) Lag et nytt program med utgangspunkt i det foregående programmet, nå for bevegelse i kombinert  $\mathbf{E}$ - og  $\mathbf{B}$ -felt. Bruk  $m = m_p$  (protonmassen),  $q = e$ ,  $\mathbf{v}(t = 0) = (0, 0, 0)$  og  $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$ . Sett magnetfeltet i  $z$ -retning til en verdi mellom 1 og 2 T og

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_x & \text{for } x \in [-d/2, d/2], \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

der  $E_0 = \frac{25 \text{ kV}}{90 \text{ }\mu\text{m}}$  (som gir en maksimal spenningsforskjell på 50 kV). Vinkelfrekvensen  $\omega$  må du velge lik syklotronfrekvensen. La tiden gå fra  $t = 0$  til  $t = 300 \text{ ns}$  med et tidssteg på  $\Delta t = 100 \text{ fs}$ . Plott  $y(t)$  mot  $x(t)$ . Hvorfor øker ikke radien like mye i hvert omløp?

- b) Som nevnt tidligere i oppgaven skal vi se på en situasjon der protonene slippes ut av syklotronen når de er i en avstand 50 mm fra sentrum av syklotronen. Vi kaller denne avstanden  $r_D$  (radien til de D-formende delene av syklotronen). Implementer i programmet ditt at partikkelen slippes ut i denne avstanden. Plott  $x(t)$ ,  $y(t)$  og  $z(t)$  mot  $t$  i samme figur. Plott også  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  og  $v_z(t)$  mot  $t$  i en annen figur.
- c) Finn farten partikkelen forlater syklotronen med.
- d) Vis at den kinetiske energien til partikkelen når den går i bane i en avstand  $r$  fra sentrum av syklotronen kan skrives

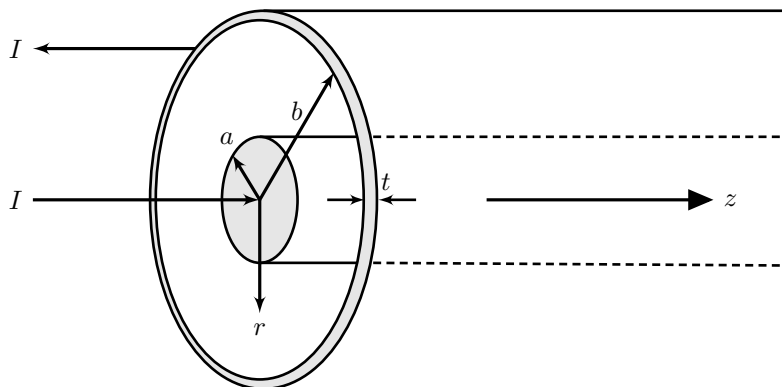
$$E_k = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2 r^2}{m}$$

der  $r = |\mathbf{r}|$ .

- e) Bruk nå uttrykket fra forrige oppgave til å beregne energien et proton har når det slippes fri fra syklotronen. Sammenlign dette tallet med hastigheten du målte i den numeriske modellen, og kommenter den ikke-relativistiske tilnærmingen som er gjort i modellen. Hvordan går det med den ikke-relativistiske tilnærmingen om vi øker avstanden fra sentrum av syklotronen til der partikkelen slippes løs til 1 meter.

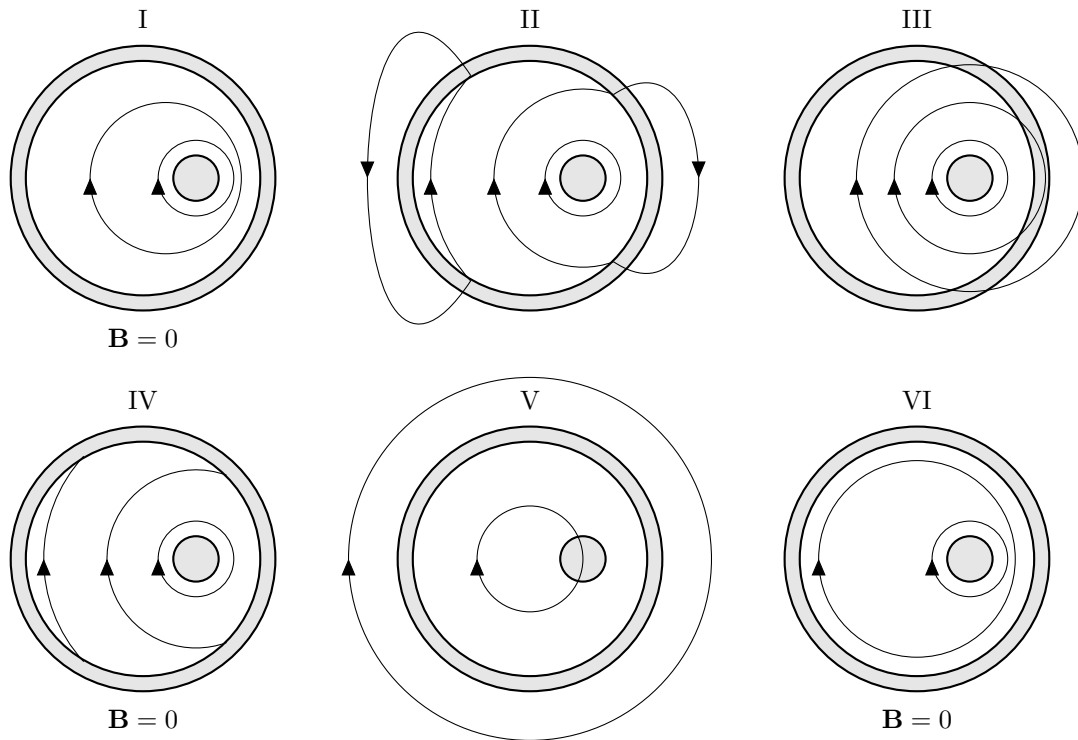
## Oppgave 4: Koaksialkabel

Gitt en koaksialkabel hvor radius på innerlederen er  $a$  og indre radius på ytterlederen er  $b$ . Ytterlederens tykkelse er  $t$ .



Strømmen  $I$  antas jevnt fordelt over innerlederen, og returstrømmen  $I$  antas jevnt fordelt over ytterlederen.

- a) Beregn det magnetiske feltet  $\mathbf{B}$  overalt. Skissér den magnetiske feltstyrken  $|\mathbf{B}|$  som funksjon av  $r$ .  
*Tips:* Bruk Ampères lov.
- b) Anta at lederne forskyves slik at de blir liggende eksentrisk. Strømmen antas fortsatt jevnt fordelt over inner- og ytterleder. Figuren på neste side viser seks forslag til grove skisser av den totale magnetiske flukstettheten. Hvilken skisse er korrekt? Begrunn gjerne svaret ved å vise at de resterende fem skissene er umulige.
- c) *Frivillig.* Studenten Pirk Kveruler ser på skissen som skal være rett, og sier at det er en flatestrøm på den indre flaten til ytterlederen, på tross av at oppgaven sier at strømmen skulle være jevnt fordelt over tverrsnittet. Forklar hvorfor Pirk har et godt poeng.



Figur 4: Seks skisser av den magnetiske flukstettheten til bruk i oppgave 4b)

## Bibliografi

- [1] Lillestøl, Egil and Hunderi, Ola and Lien, Jan R., Generell fysikk for universiteter og høgsoler, 2001.