UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys1120
Eksamensdag:	Onsdag 12. desember 2018
Tid for eksamen:	0900–1300
Oppgavesettet er på:	10 sider
Vedlegg:	Formelark
Tilatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator Rottman: Matematisk formelsamling Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Oppgave 1: Parallelle linjer

a) En ladning q befinner seg i vakuum i punktet $\vec{r}_0 = x_0\hat{x} = (x_0, 0, 0)$ på x-aksen. Hva er det elektriske feltet i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$? Lag en tegning som illustrerer vektorene du har brukt i utregningen og retningen på feltet i punktet $\vec{r}$.

Solution. Vi anvender Coloumbs lov. Det elektriske feltet er

$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R} \,, \tag{1}$$

hvor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y, z)$ og $\hat{R} = \vec{R}/R$.

* * *

b) En uendelig lang linjeladning med uniform linjeladningstetthet ρ_l er plassert på x-aksen. Det er ingen andre ladninger til stede og systemet er i vakuum. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$.

Solution. Siden ladningsfordelingen er sylindersymmetrisk vil det elektriske feltet også være sylindersymmetrisk. Feltet vil ikke være avhengig av den azimutale vinkelen ϕ og heller ikke avhengig av x siden systemet blir det samme ved translasjon langs x-aksen og rotatsjon om x-aksen. Derfor må $\vec{E} = E(s)\hat{s}$ hvor $\vec{s} = (0, y, z)$ og $\hat{s} = \vec{s}/s$.

Vi anvender Gauss' lov på en sylinder langs x-aksen med radius s og sentrum på x-aksen og lengde L. Inne i sylinderen er det da en ladning $\rho_s L$. Det vil kun være sylinderoverflaten som vil bidra til fluksen, siden feltet er rettet langs s-aksen. Gauss' lov gir da $2\pi sLE = \epsilon_0 Q_{in} = \epsilon_0 \rho_l L$ og dermed

$$\vec{E} = E(s)\hat{s} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s}\ . \tag{2}$$

c) En uendelig lang linjeladning med uniform linjeladningstetthet ρ_l er i stedet plassert på en linje parallel med x-aksen gjennom $y = d$. Det er ingen andre ladninger til stede og systemet er i vakuum. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$.

Solution. Vi anvender resultatet fra oppgaven over, men bruker nå at $\vec{s}' = (0, y - d, z)$:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 s'}\hat{s}'\ . \tag{3}$$

d) La oss nå anta at systemet består av to uendelig lange linjer som er parallelle med x-aksen. Den ene linjen går gjennom punktet $(0, 0, 0)$ og den andre går gjennom $(0, d, 0)$. Begge linjene har uniforme linjeladningstettheter ρ_l. Vis at det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i xy-planet er:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-d}\right)\hat{y}\ . \tag{4}$$

Solution. I xy-planet er $\vec{s} = (0, y, 0) = y\hat{y}$ og $\vec{s}' = (0, y-d, 0) = (y-d)\hat{y}$. Vi finner det elektriske feltet ved superposisjon:

$$\begin{aligned}
\vec{E} = &\quad \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 y^2}y\hat{y} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 (y-d)^2}(y-d)\hat{y} && (5)\\
= &\quad \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} + \left(\frac{y}{y^2} + \frac{(y-d)}{(y-d)^2}\right)\hat{y} && (6)\\
= &\quad \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{(y-d)}\right)\hat{y} && (7)
\end{aligned}$$

Vi ser nå på et system som består av en linje langs x-aksen og gjennom origo med en linjeladningstetthet ρ_l som ikke er uniform, men varierer med x:

$$\rho_l(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \rho_l(x) & 0 \le x \le L \\ 0 & x > L \end{cases}\ . \tag{8}$$

e) Finn et uttrykk på integral-form for det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$ fra linjeladningstettheten $\rho_l(x)$ på x-aksen. (Du skal ikke løse dette integralet).

Solution. Vi deler linjen opp i små deler. En del med lengde dx' i posisjonen $\vec{r}' = x'\hat{x}$ vil bidra med en ladning $dq = \rho_(x')dx'$. Bidraget til det elektriske feltet fra denne ladningen er:

$$d\vec{E} = \frac{\rho_l(x')dx'}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \ , \tag{9}$$

Vi finner feltet ved å integrere fra $x' = 0$ til $x' = L$:

$$\vec{E} = \int_0^L \frac{\rho_l(x')dx'}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-(x',0,0)}{|\vec{r}-(x',0,0)|^3} = \int_0^L \frac{\rho_l(x')dx'}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x-x')\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{|(x-x')^2+y^2+z^2|^{3/2}} \ . \tag{10}$$

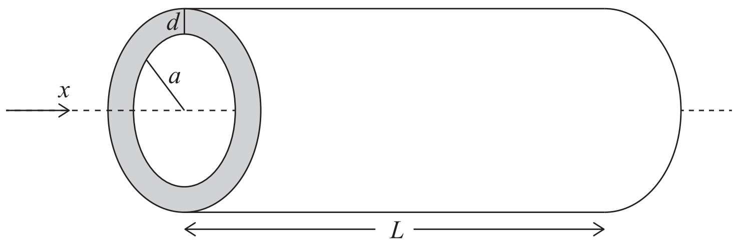
f) Anta at du kan tilnærme integralet med en sum over N elementer med bredde $dx_i = L/N$ i posisjonene $x_i = (i+1/2)dx_i$ for $i = 0, 1, \dots, N-1$. Hvert element bidrar med en punktladning $dq_i = \rho_l(x_i)dx_i$. Skriv et kort program som finner en tilnærmet verdi for det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r}$ ved å summere feltene fra punktladningene dq_i.

Solution. Programmet blir:

```
import numpy as np
from scipy.constants input epsilon_0
N = 100
r = np.array([2,3,4])
L = 2
E = np.array([0,0,0])
x0 = 0
dx = L/N
for i in range(N):
    x = i*dx + x0
    dr = r-np.array([x,0,0])
    dE = rho_l(x)*dx/(4*np.pi*epsilon_0)*dr/dot(dr,dr)**1.5
    E = E + dE
```

Oppgave 2: Sylindrisk komponent

Vi skal i denne oppgaven studere oppførselen til en sylinderformet nervecelle som illustrert i figuren. Vi modellerer en del av cellen som et sylinderskall. Sylinderskallet har lengde L. Den indre radiusen er a. Tykkelsen på sylinderskallet er d. Du kan anta at L er mye større enn a og d slik at systemet har sylindersymmetri.



Først ønsker vi å finne **kapasitansen** til sylinderskallet. Vi antar da at området innenfor og utenfor sylinderskallet er ideelle ledere. Sylinderskallet er et dielektrisk materiale med dielektrisk konstant ϵ.

a) Anta at det er en ladning Q på den indre overflaten av sylinderskallet og en ladning $-Q$ på den ytre overflaten av sylinderskallet. Finn det elektriske feltet alle steder i rommet.

Solution. Vi antar at det elektriske feltet har sylindersymmetri, slik at det har formen $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, i sylinderkoordinater. Vi bruker Gauss' lov på en sylinderflate med lengde L. For $r < a$ vil det ikke være noen ladning innenfor flaten, derfor er feltet null her. For $r > a + d$ vil det ikke være noen netto ladning innenfor flaten, derfor er feltet null her. I sylinderskallet gir Gauss' lov:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r L = Q/\epsilon \Rightarrow E = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon r} \tag{11}$$

b) Finn skalarpotensialet $V(r)$ som funksjon av avstanden r til sylinderskallets akse.

Solution. Vi antar at potensialet på den ytre overflaten er det samme som uendelig langt vekk fra sylinderen - vi setter derfor dette til å være referanseverdien som er null.

$$V(r) = \int_r^{a+d} E(r)dr = \int_r^{a+d} \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon r} dr \tag{12}$$

$$= \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{a+d}{r}\right) . \tag{13}$$

c) Vis at kapasitansen til sylindernskallet er

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)} . \tag{14}$$

Solution. Vi finner kapasitansen ved $C = Q/V$ hvor $V = V(a) = Q/(2\pi\epsilon L)\ln(1 + d/a)$:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)} \ . \tag{15}$$

Så ønsker vi å finne **resistansen** til sylinderskallet. Sylinderskallet er en leder med konduktivitet σ.

d) Finn strømtettheten $\vec{J}$ i sylinderskallet når det går en strøm I gjennom sylinderskallet fra den indre til den ytre overflaten.

Solution. På grunn av sylindersymmetri antar vi at strømtettheten også er sylindersymmetrisk: $\vec{J} = J(r)\hat{r}$. Den totale strømmen gjennom ethvert sylinderskall mellom den indre og den ytre flaten vil ha samme strømmen I på grunn av bevaring av ladning. Denne strømmen er:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = J(r) 2\pi L r \ \Rightarrow \ J(r) = \frac{I}{2\pi r L} \ . \tag{16}$$

e) Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i sylinderskallet i dette tilfellet.

Solution. Vi finner det eleketriske feltet ved Ohm's lov: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ og derfor

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} = \frac{I}{2\pi\sigma L r}\hat{r} \ . \tag{17}$$

f) Finn skalarpotensialet $V(r)$ i sylinderskallet og bruk dette til å vise at resistansen til sylinderskallet er

$$R = \frac{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)}{2\pi\sigma L} \ . \tag{18}$$

Solution. Vi antar igjen at potensialet er null ved $r = a + d$, og finner V fra

$$V(r) = \int_r^{a+d} E(r) dr = \int_r^{a+d} \frac{I}{2\pi\sigma L r} dr \tag{19}$$

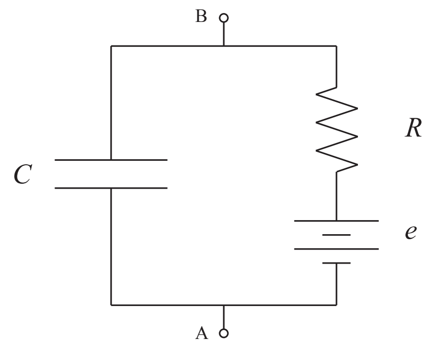
$$= \frac{I}{2\pi\sigma L} \ln\left(\frac{a+d}{r}\right) \ . \tag{20}$$

og vi finner da $R = V/I$ som gir

$$R = \frac{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)}{2\pi\sigma L} \ . \tag{21}$$

Oppgave 3: Krets-modell for en celle

Vi skal studere en krets som en modell for en cellemembran. Kretsen består av en kondensator C, en motstand R og et batteri med emf e koblet sammen som illustrert i figuren. Vi måler potensialforskjellen mellom punkt A og B, V_{AB}.



a) Ved tiden $t = 0$ er kondensatoren uten ladning. Hva er strømmen I_R gjennom motstanden ved $t = 0$?

Solution. Ved $t = 0$ er det ikke noen ladning på kondensatoren. Spenningsfallet over denne er derfor null. Kirchoff spenningslov rundt sløyfen gir da: $e - RI = 0$ og derfor $I(t = 0) = e/R$.

b) Hva er ladningen, Q_∞, på kondensatoren når $t \to \infty$?

Solution. Når $t \to \infty$ vil ladningen Q gå mot en stasjonær verdi slik at det ikke lenger er noen endring i ladningen. Dermed vil strømmen, $I = dQ/dt$, gå mot null. Kirchoffs spenningslov rundt sløyfen gir da: $e - RI - Q/C = 0$, hvor $I = 0$ og dermed $Q = Q_\infty = eC$.

c) Vis at likningen som beskriver ladningen, Q, på kondensatoren kan skrives som

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(Q_\infty - Q\right) \ , \tag{22}$$

hvor $\tau = RC$.

Solution. Kirchoffs spenningslov gir $e - (Q/C) - RI = 0$ hvor vi nå setter at $I = dQ/dt$ og får:

$$e - \frac{Q}{C} - R\frac{dQ}{dt} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R}\left(e - \frac{Q}{C}\right) \tag{24}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC}\left(eC - Q\right) \tag{25}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(Q_\infty - Q\right) \tag{26}$$

d) Skriv et program som finner spenningen $V_{AB}(t)$ som funksjon av tiden for dette systemet.

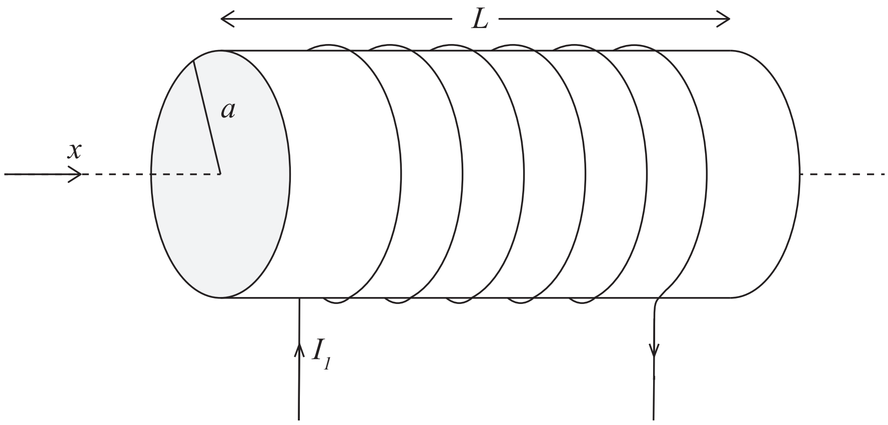
Solution.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Q0 = 0
tau = 3.4
Qinf = 4.0
dt = 1e-5
time = 10.0
n = int(np.ceil(time/dt))
Q = np.zeros((n,1),float)
Q[0] = Q0
for i in range(n-1):
    Q[i+1] = Q[i] + (1/tau)*(Qinf-Q[i])*dt
plt.plot(Q)
```

Merk at selv om denne likningen er løsbar, er det i denne oppgaven ikke spurt om å plotte den eksakte løsningen, men å skrive et program som finner løsningen.

Oppgave 4: Dobbeltspole

Vi skal i denne oppgaven studere en solenoide som vist i figuren. Solenoiden består en ledning som er viklet N ganger om en sylinder med radius a og lengde L hvor $L \gg a$. Inne i sylinderen er det et magnetisk materiale med permeabilitet μ.



a) Finn $\vec{H}$-feltet, $\vec{B}$-feltet og magnetiseringen $\vec{M}$ inne i solenoiden når det går en strøm I gjennom ledningen. Du kan anta at $\vec{H}$-feltet er null utenfor solenoiden og at $\vec{H}$-feltet kun har en komponent i x-retningen inne i spolen.

Solution. Vi anveder Amperes lov:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = HL \Rightarrow H = \frac{NI}{L} \tag{27}$$

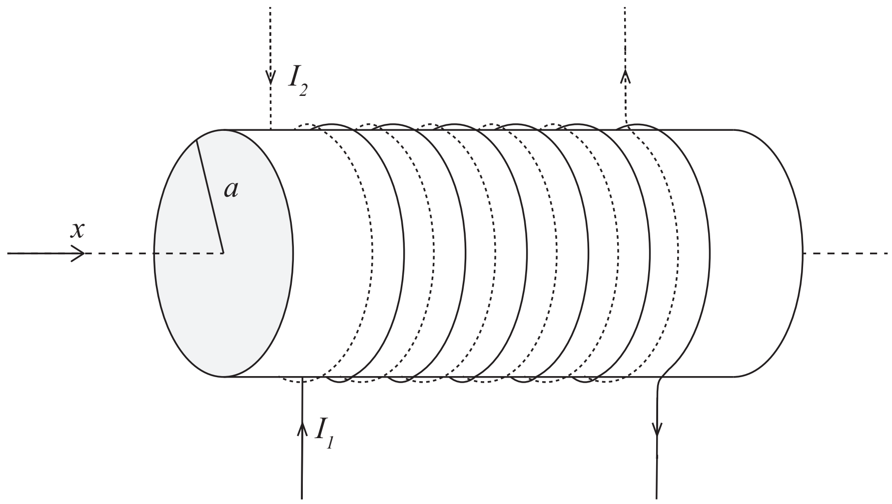
og dermed $\vec{H} = NI/L\hat{x}$. Vi finner $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu NI/L\hat{x}$. Magnetiseringen er gitt ved at $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu\vec{H}$ og dermed $\vec{M} = (\mu/\mu_0 - 1)\vec{H}$.

b) Finn selvinduktansen L_{11} for spolen.

Solution. Selvinduktansen er gitt som $L_{11} = \Phi/I$ hvor

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu IN}{L} \int_S dS = \frac{\mu IN}{L} N\pi a^2 = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{L} \ . \tag{28}$$

Vi vikler nå en ny ledning rundt den samme spolen med M antall viklinger som illustrert med stiplet linje i figuren under. Merk at indikert positiv strømretning rundt spolen for strøm I_2 er motsatt av positiv strømretning for I_1. Du kan anta at a og L er de samme, at ledningene er isolerte slik at de ikke er i kontakt og at begge ledningene dekker det samme området på sylinderen.



c) Hva er den gjensidige induktansen L_{12} mellom disse to spolene?

Solution. Vi finner fluksen av feltet fra spole 1 gjennom kresten utspent av spole 2:

$$\Phi_{12} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{\mu I_1 N}{L} M \pi a^2 \ , \tag{29}$$

som gir at

$$L_{12} = \Phi_{12}/I_1 = \frac{\mu N M \pi a^2}{L} \ . \tag{30}$$

d) Vi kobler spole 1 til en tidsvarierende spenningskilde med emf $V_1(t)$ og spole 2 til en motstand R_2. Finn et sett med likninger for strømmene I_1 og I_2 i spole 1 og spole 2. (Du skal ikke løse disse likningene).

Solution. Vi anvender Kirchoffs spenningslov rundt hver av de to kretsene.

$$V_1 - \frac{d\Phi_1}{dt} = 0 \ , \tag{31}$$

hvor Φ_1 er den totale fluksen gjennom krets 1. Denne skyldes både feltet fra krets 1 og feltet fra krets 2: $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}$.

$$RI_2 - \frac{d\Phi_2}{dt} = 0 \ , \tag{32}$$

hvor Φ_2 er den totale fluksen gjennom krets 2. Denne skyldes både feltet fra krets 1 og feltet fra krets 2: $\Phi_2 = \Phi_{12} + \Phi_{22}$.

Vi kan så bruke definisjonen av gjensidig induktans: $\Phi_{11} = L_{11}I_1$, $\Phi_{12} = L_{12}I_1$. $\Phi_{21} = L_{21}I_2$ og $\Phi_{22} = L_{22}I_2$. Da får vi:

$$V_1 - L_{11}\frac{dI_1}{dt} - L_{12}\frac{dI_2}{dt} = 0 \; , \tag{33}$$

og

$$RI_2 - L_{22}\frac{dI_2}{dt} - L_{21}\frac{dI_1}{dt} = 0 \; , \tag{34}$$

hvor vi så kan bruke at $L_{12} = L_{21}$. Vi kjenner L_{11} og kan tilsvarende finne L_{22}.