UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys1120 og Fys1120L
Eksamensdag:	Onsdag 11. desember 2019
Tid for eksamen:	0900–1300
Oppgavesettet er på:	3 sider
Vedlegg:	Formelark
Tilatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Rottman: Matematisk formelsamling
	Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Oppgave 1: Konsentriske skall

To like ladninger q befinner seg i vakuum i punktene $\mathbf{r}_1 = a\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{r}_2 = -a\hat{\mathbf{x}}$ hvor $\hat{\mathbf{x}}$ er enhetsvektoren i x-retningen og a er en lengde.

a) Hva er det elektriske feltet, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, i $\mathbf{r} = (x, y, z)$? Lag en tegning som illustrerer systemet og $\mathbf{E}$-feltet.

b) Hva er det elektriske potensialet, V, i punktet z på z-aksen?

c) Finn det elektriske feltet og det elektriske potensialet i origo. Kommenter verdien for potensialet i lys av verdien for feltet.

Vi plasserer i stedet en romladningstetthet $\rho_1(\mathbf{r})$ i vakuum. Tettheten er uniform for $r \leq a$ og null for $r > a$, hvor $r = |\mathbf{r}|$ og a er en lengde. Den totale ladningen er q.

d) Vis at romladningstettheten er $\rho_1(r) = 3q/(4\pi a^3)$ for $r \leq a$ og null for $r > a$.

e) Finn det elektriske feltet alle steder i rommet.

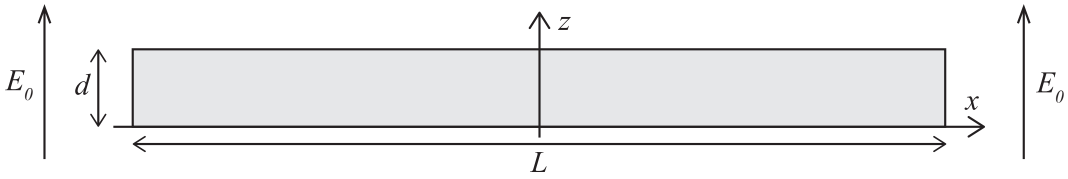
Vi plasserer i tillegg en romladningstetthet $\rho_2(\mathbf{r})$ oppå ρ_1 i det samme systemet. Tettheten ρ_2 er uniform for $r \leq b$ og null for $r > b$, hvor $b > a$ er en lengde. Den totale ladningen for ladningstettheten ρ_2 er $-q$.

f) Finn det elektriske feltet overalt i rommet fra systemet bestående av begge romladningstetthetene. Kommenter verdien til feltet for $r > b$.

g) Skriv et kort program som regner ut og visualiserer det elektriske feltet i et område $-L < x < L$, $-L < z < L$ i xz-planet, hvor $L > b$.

Oppgave 2: Ideell leder

En ideell leder er formet som en tynn plate med lengde L og tykkelse d. Vi plasserer platen slik at L ligger langs x-aksen og d langs z-aksen som vist i figuren. Du kan anta at $L \gg d$ og du kan se bort fra kanteffekter. Lederen plasseres i et uniformt, ytre elektrisk felt $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{z}}$.

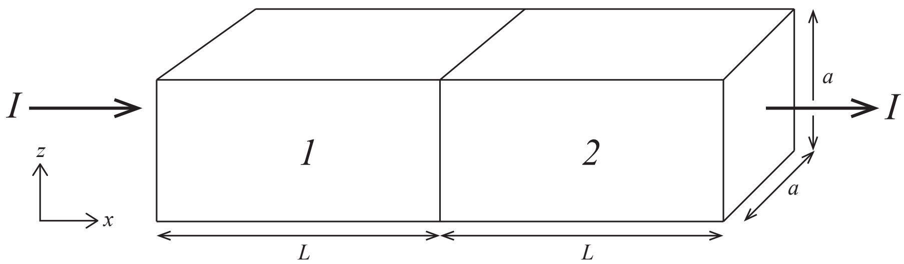


a) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}(x, y, z)$ inne i lederen. Begrunn svaret.

b) Hva er overflateladningstettheten på oversiden ($z = d$) og undersiden ($z = 0$) av lederen?

Oppgave 3: Sammensatt leder

To ikke-ideelle ledere med tverrsnitt $a \times a$ og lengder L og L er koblet sammen som vist i figuren. Leder 1 har konduktivitet σ_1, og leder 2 har konduktivitet σ_2. Det går en strøm I gjennom begge lederne som vist i figuren.



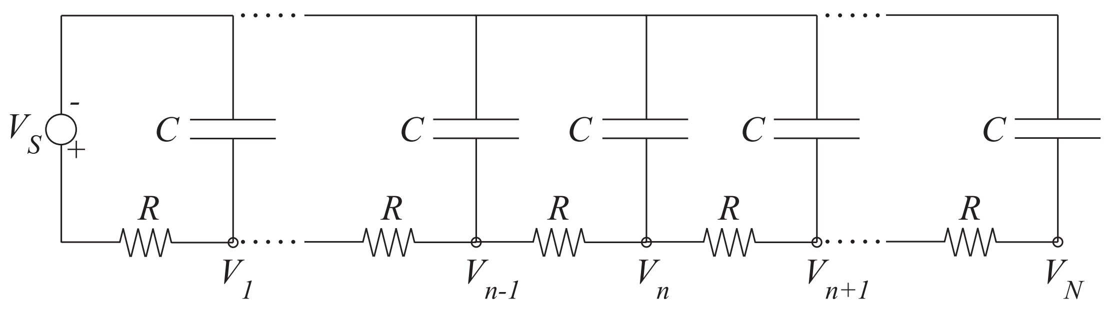
a) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}_1(x)$ og $\mathbf{E}_2(x)$ i hver av lederne.

b) Finn potensialforskjellene V_1 og V_2 over lederne.

c) Finn motstandene R_1 og R_2 til hver av lederne og motstanden R til hele systemet. Sammenlikn med hva du forventer for to motstander og kommenter.

Oppgave 4: Modell for cellemembran

Figuren viser en enkel modell for en celle-membran som består av N elementer som er koblet sammen. Systemet er koblet til en spenningkilde $V_s(t)$ på venstre side som vist i figuren.



a) Hvis vi kobler på en konstant spenning $V_s(t) = V_s$, hva blir spenningene V_n etter uendelig lang tid?

b) Vis at spenningen V_n, $n = 2, \ldots, N-1$, kan uttrykkes ved likningen:

$$C\frac{dV_n}{dt} = \frac{V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}}{R} \tag{1}$$

c) Hva blir likningen for spenning V_1?

d) Hva blir likningen for spenning V_N? Gi en tolkning av denne likningen når systemet er i en stasjonær tilstand.

e) Skriv et kort program som finner $V_n(t + dt)$ når du kjenner $V_n(t)$.

Oppgave 5: Magnetisk felle

Vi skal i denne oppgaven studere magnetfeltet $\mathbf{B} = \frac{B_0}{b}(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} - 2z\hat{\mathbf{z}})$, hvor B_0 er en konstant og b er en lengde.

a) Skisser **B**-feltet i xz-planet.

b) Hva er divergensen, $\nabla \cdot \mathbf{B}$, til magnetfeltet?

Vi plasserer en kvadratisk krets med sidekant L i xy-planet med sentrum i origo og flatenormal i positiv z-retning.

c) Hva er den magnetiske fluksen, Φ, gjennom denne kretsen?

d) Kretsen beveges langs z-aksen med en hastighet v. Finn emf-en, e, som er indusert i kretsen som funksjon av z.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\text{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\text{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\text{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\text{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\text{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\text{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\text{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\text{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\text{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\text{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\text{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Kretser:

$$\sum_i V_i = 0, \qquad \sum_i I_i = 0, \qquad V = RI, \qquad I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \qquad V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \qquad P = VI,$$

$$V = \mathrm{Re}\{\hat{V}\exp(i\omega t)\}, \qquad \hat{Z} = R, \qquad \hat{Z} = \frac{1}{i\omega C}, \qquad \hat{Z} = i\omega L.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\text{t}} = \mathbf{E}_{2\text{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\text{n}} - \mathbf{D}_{2\text{n}} = \rho_{\text{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\text{t}} - \mathbf{H}_{2\text{t}} = \mathbf{J}_{\text{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\text{n}} = \mathbf{B}_{2\text{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\text{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse})$$
$$\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$
$$\nabla\cdot(V\mathbf{A}) = V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(V\mathbf{A}) = (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla\times(\nabla V) = 0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S}$$
$$\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$
$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$