November 29, 2013

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i FYS 1120 – Elektromagnetisme
Eksamensdag: 4. desember 2013
Tid for eksamen: 14:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 2 sider
Vedlegg: Liste over likninger (3 sider)
Tillatte hjelpemidler: Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter
Rottman: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

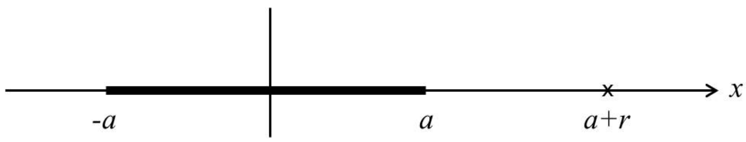
Oppgave 1

a) Beskriv matematisk det elektriske feltet fra en punktladning, og definer alle symboler som benyttes.

SVAR: Feltet kan skrives som,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \,,$$

der q er ladningens størrelse inkl. fortegn, r er avstanden fra q til et punkt i avstand r der feltet har verdien E. Siste faktor er enhetsvektoren i retning fra ladningen til punktet, mens i prefaktoren er ϵ_0 permittiviteten til vakum.



En tynn rett stav med lengde $2a$ og jevnt fordelt ladning Q er plassert på x-aksen som vist over.

b) Vis at størrelsen til E-feltet i punktet $x = a + r$ er gitt ved,

$$E = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\,(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+2a}).$$

SVAR: Bidraget til E-feltet i $a + r$ fra en infinitessimal ladning λdx på staven i et punkt x er

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{(a + r - x)^2}$$

Integrerer alle bidrag fra $x = -a$ til a, og får det oppgitte svaret.

c) Plasser en ladning q i punktet $x = a + r$, og beregn kraften på ladningen dersom $q = Q = 1.0\ \mu$C, og $a = r = 10$ cm.
Finn et analytisk uttrykk for kraften når $r \gg a$. Kommenter svaret.

SVAR: Setter inn de oppgitte tall og finner at kraften fra uttrykket $F = qE$ blir 0.3 N.
For $r \gg a$ kan siste ledd i uttrykket for E skrives

$$\frac{1}{r+2a} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{1+2a/r} = \frac{1}{r}\,(1 - \frac{2a}{r} + ...)$$

Neglisjerer høyere ordens bidrag, og får

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\,.$$

Med stor avstand blir kraften som mellom 2 punktladninger. Dette er forventet siden stavens dimensjoner blir da uten betydning.

d) En plate med konstant tykkelse $2a$, og stort areal har uniform ladningstetthet per volum, ρ.
Finn uttrykk for E-feltet utenfor og inne i platen.

SVAR: Vi legger x-aksen normalt på platen, og velger origo midt inne i platen slik at dens to overflater har koordinatene $x = \pm a$. P.g.a. symmetri vil E-feltet i planet x=0 være null, mens overalt ellers er feltet rettet normalt på platen. Betrakt først feltet for $x \geq 0$, der feltet peker parallelt med $x-$aksen.

For å finne E-feltet utenfor platen legger vi en Gauss-flate i form av en rett sylinder med grunnflate-areal, A, og med den ene endeflaten i planet $x = 0$ og den andre i $x > a$. Gauss' lov gir da at $E(x)A = \rho a A/\varepsilon_0$, dvs. feltet er homogent med verdien $E = \rho a/\varepsilon_0$.

For å finne E-feltet inne i platen legger vi en sylindrisk Gauss-flate med en endeflaten i $x = 0$ og den andre i $x \leq a$. Gauss' lov gir da; $E(x)A = \rho x A/\varepsilon_0$, dvs. $E(x) = \rho x/\varepsilon_0$, dvs lineært voksende fra null og til feltverdien utenfor platen.

Feltet har samme fordeling for $x < 0$, men er rettet antiparallelt med x-aksen.

Oppgave 2

Beskriv/forklar med ord og figur (0.5 - 1 side per deloppgave);

a) Hall effekten.

SVAR: se læreboka, seksjon 27.9.

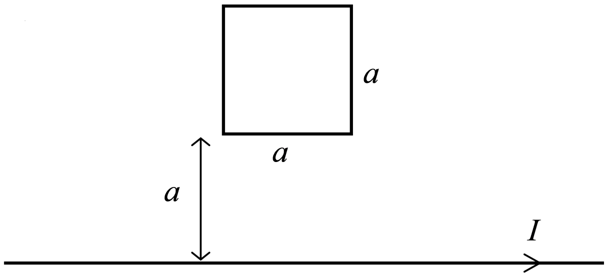
b) Virkemåten til en transformator.

SVAR: se læreboka, seksjon 31.6.

Oppgave 3

En kvadratisk ledningsløyfe med sidekant $a = 1.0$ cm er plassert i avstanden a fra en uendelig lang og rett ledning, se figuren over. Den rette ledningen fører en konstant strøm $I_0 = 1.0$ A.

a) Beregn den magnetiske fluksen gjennom sløyfen, og vis at svaret blir $\Phi_B = (\mu_0/2\pi) I_0 a \ln 2$.



SVAR: Magnetfeltet i avstand r i fra ledningen er $B(r) = \mu_0 I_0/2\pi r$. Fluksen gjennom den kvadratiske sløyfen finner man slik,

$$\Phi_B = a\int_a^{2a} B(r)dr = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\ \ln\frac{2a}{a},$$

og som gir det oppgitte svaret.

Strømkilden slås av ved tiden $t = 0$, og I avtar eksponensielt til null med tidskonstant $\tau = 1.0\ \mu$s.
Dvs. for $t > 0$ er $I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$.

b) Beregn strømmen I' indusert i den kvadratiske sløyfen som funksjon av tid. Sløyfen har resistans $R = 1.0\ \Omega$.

SVAR:
Når strømmen avtar endres også fluksen, beskrevet ved $\Phi_B(t) = (\mu_0 I_0 a \ln 2/2\pi)\exp(-t/\tau)$. Dette induserer en elektromotorisk spenning, $\varepsilon = -\partial\Phi_B/\partial t$, i den kvadratiske sløyfa, og setter opp en strøm, $I' = \varepsilon/R$. Strømmen blir

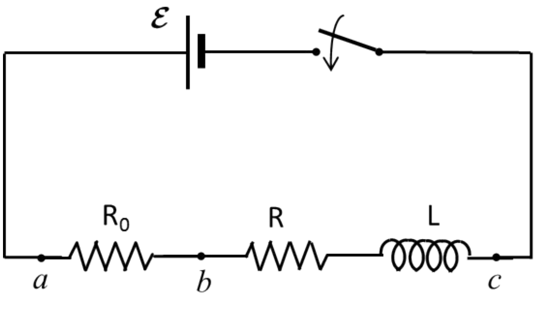
$$I'(t) = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi r R}\ln 2\ \exp(-t/\tau) = I'(0)\exp(-t/\tau).$$

der $I'(0) = 1.4$ mA. Retningen til den induserte strømmen er mot urviseren.

c) Finn størrelsen på kraften som virker på sløyfen rett etter $t = 0$. Bestem også kraftens retning.

SVAR: Siden i kvadratet nærmest den lange rette ledningen påvirkes rett etter $t = 0$ av kraften, $F_1 = (\mu_0 I_0/2\pi a)I'(0)a$, og er tiltrekkende. Siden lengst vekk fra den rette ledningen har dobbel avstand, og kraften er derfor halvparten så stor, og er frastøtende. Kraften på de andre to andre sidene kanselleres.
Netto kraft er derfor tiltrekkende, og har verdien $F_1/2 = 1.4 \cdot 10^{-10}$ N.

Oppgave 4



Figuren viser en krets bestående av et batteri med elektromotorisk spenning $\varepsilon = 36$ V, to motstander med resistans $R_0 = 50\ \Omega$ og $R = 150\ \Omega$, en spole med induktans $L = 4.0$ H, samt en bryter som brått slutter kretsen ved tiden $t = 0$.

a) Hva er strømmen, I, i kretsen rett etter t = 0? Grunngi svaret.
Hva er da spenningen V_{ab} mellom punktene a og b, og spenningen V_{bc} mellom b og c ?

SVAR: Strømmen vil ikke umiddelbart endres i det kretsen sluttes pga tregheten i induktansen, dvs. I forblir null, $I_0 = 0$. Spenningen over resistansen er da $V_{ab} = R_0 I_0 = 0$, mens $V_{bc} = 36\ V$.

b) Etter lang tid stabiliseres strømmen til verdien I_∞. Hvor stor er I_∞, samt de stabiliserte verdiene for V_{ab} og V_{bc}?

SVAR: Etter at stasjonære forhold er etablert blir strømmen $I_\infty = \varepsilon/(R_0 + R) = 0.18\ A$, mens $V_{ab} = R_0 I_\infty = 9V$, og $V_{bc} = R I_\infty = 27V$.

c) *Finn uttrykk for hele tidsforløpet til $I(t), V_{ab}(t)$ og $V_{bc}(t)$, og skisser tidsforløpene grafisk.*
Merk: Om du ikke får til å utlede uttrykkene, skisser grafene basert på svar i a) og b).

SVAR: for $t > 0$ gjelder $\varepsilon = (R_0 + R)I(t) + LI'(t)$. Velger en test-løsning; $I(t) = A\exp(-t/\tau) + B$, som ved innsetting i differensial likningen gir $B = -A = \varepsilon/(R_0 + R)$, og tidskonstanten $\tau = L/(R_0 + R) = 0.02$ s. Strømmen kan da skrives $I(t) = I_\infty[1 - \exp(-t/\tau)]$.
Da blir $V_{ab}(t) = R_0 I_\infty[1 - \exp(-t/\tau)]$, og $V_{bc}(t) = RI(t) + LI'(t) = R_0 I_\infty[3 + \exp(-t/\tau)]$, der $R = 3R_0$ er brukt.