UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS1120 Elektromagnetisme
Eksamensdag: 3. desember 2014.
Tid for eksamen: 14:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 3 sider
Vedlegg: Liste med likninger (3 sider)
Tillatte hjelpemidler: Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter
Rottman: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

En uendelig lang og tynn stang har konstant positiv ladning per lengde, λ.

(a) Bruk Gauss' lov til å vise at det elektriske feltet i avstand r fra stanga er $E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$. Beskriv retningen på feltet.

SVAR: E-feltet er rettet radielt vekk fra stangen. Vi legger en sylindrisk Gaussflate der aksen sammenfaller med stangen. Fluksen av E-feltet gjennom flaten blir $\Phi_E = E\, 2\pi rL$, der L er lengden av sylinderen. Flaten omslutter ladningen λL, og Gauss' lov gir da $E\, 2\pi rL = \lambda L/\varepsilon_0$, som gir det oppgitte uttrykket for E.

(b) Finn et uttrykk for spenningen (forskjellen i potensial) mellom to punkter i ulik avstand r_A og $r_B > r_A$ fra stanga.
Regn ut spenningen når $r_A = 0.5$ m, $r_B = 0.6$ m og $\lambda = 17$ nC/m.

SVAR: Potensialforskjellen er gitt ved $\Delta V = V_A - V_B = \int E(r)\,dr$ som gir $\Delta V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0) \ln(r_B/r_A)$.
Innsetting av tall gir $\Delta V = 55.7$ V.

Oppgave 2

(a) Betrakt en prosess der en parallell-plate kondensator med vakum mellom platene lades opp ved å flytte ladninger (elektroner) fra den ene platen til den andre.
Vis at arbeidet utført ved å flytte en total ladning Q er $W = Q^2/2C$, der C er kapasitansen.

SVAR: Se læreboka, avsnitt med tittel «Energy storage in capacitors and electric-field energy».

(b) Vis at energitettheten i det elektriske feltet, E, mellom platene er $u = \varepsilon_0 E^2/2$.
Regn ut energitettheten i E-feltet ved lynnedslag, der typisk E = 3 MV/m.

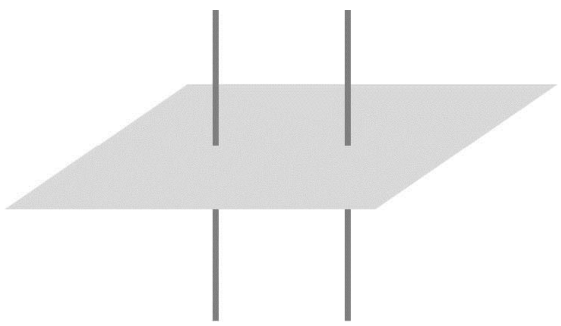
SVAR: Arbeidet, W, i spm. (a) er lik den potensielle energien U i den oppladede kondensatoren, (når uladet kondensator har U=0). Kan da skrive $U = CV^2/2$, der det er brukt at $Q = CV$, og V er potensialforskjellen mellom platene. For kondensatoren gjelder at $C = \varepsilon_0 A/d$, der A er platenes areal og d er deres avstand. Det elektriske feltet mellom platene er $E = V/d$.
Setter inn i uttrykket for U, og bruker at energitettheten er $u = U/Ad$, og får det oppgitte svar.
Energitettheten for oppgitt E-felt blir u = 39.8 J/m^3.

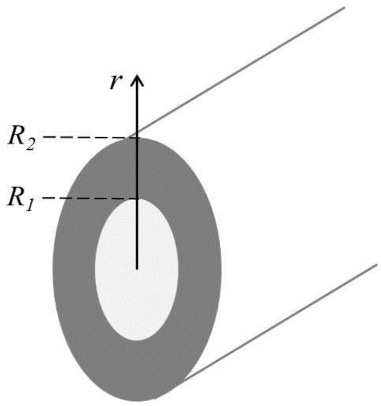
(c) I nærheten av sterke permanent-magneter kan man ha magnetfelt på 1 T.
Hvor stor er energitettheten der?
Gir svaret grunn til <u>*ikke*</u> å holde sterke magneter i hånden?

SVAR: Energitettheten i magnetfelt er $u = B^2/2\mu_0$, som for B = 1 T gir u = 3.98 10^5 J/m^3.
Beregningen viser at energitettheten i B-feltet er 10,000 ganger større enn i typiske E-felt ved lynnedslag. I motsetning til E-felt, som lett kan ionisere og flytte på elektriske ladninger i organisk materiale, har <u>statiske</u> magnetfelt her svært liten påvirkning.

Oppgave 3

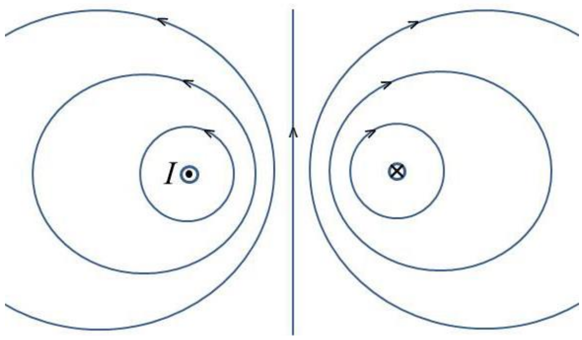
Figuren under til venstre viser to parallelle vertikale strømførende ledninger. Anta at ledningene er mye lenger enn avstanden mellom dem.





(a) Tegn figur som viser magnetfelt-linjene i horisontalplanet når de to strømmene er like store og har motsatt retning.

SVAR:



(b) Beregn kraften mellom ledningene per lengde når avstanden er 1 cm og strømmen er 3 A. Angi retningen på kraften.

SVAR: Kraft per lengde på strøm I_1 fra strøm I_2 er gitt ved $F = B_2 I_1$ der $B_2 = (\mu_0/2\pi)\, I_2/d$ og d er avstanden mellom ledningene. Med $I_1 = I_2 = 3$ A, og $d = 1$ cm gir dette $F = 1.8 \cdot 10^{-4}$ N/m. Kraften mellom ledningene er frastøtende.

Figuren over til høyre viser et metallrør med indre og ytre radius R_1 og R_2. Røret leder en total strøm I, som vi antar er uniformt fordelt over lederens tverrsnitt.

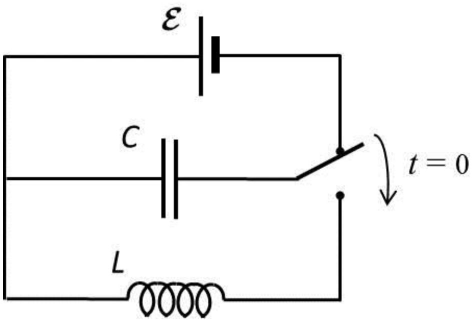
(c) Bruk Ampere's lov til å finne uttrykk for magnetfeltet utenfor røret, og i hulrommet inni.

SVAR: P.g.a. sylinder symmetri må feltlinjene danne konsentriske sirkler med sentrum i midten av røret. Utføres linjeintegralet av B-feltet rundt en sirkel utenfor røret gir Ampere's lov at; $B(r)\, 2\pi r = \mu_0 I$, og man får $B(r) = (\mu_0/2\pi) I/r$.
Utføres tilsvarende integral i hulrommet vil integrasjonsveien omslutte null strøm, følgelig er $B = 0$ der.

(d) Vis at inne i metallet er magnetfeltet gitt ved $B = \mu_0 I \dfrac{r^2 - R_1^2}{2\pi r\,(R_2^2 - R_1^2)}$.

SVAR: Med uniform strømtetthet, j, i metallet kan den uttrykkes som $j = I / \pi (R_2^2 - R_1^2)$.
Utføres nå linjeintegralet langs en sirkel med radius r i metallet er den omsluttede strømmen gitt ved $j\,\pi\,(r^2 - R_1^2)$. Da sier Ampere's lov at $B\, 2\pi r = \mu_0\, j\, \pi\, (r^2 - R_1^2)$. Setter man inn for j, fåes the oppgitte uttrykket for B.

Oppgave 4



Betrakt kretsen vist på figuren over. Kondensatoren, som har kapasitans $C = 5$ nF, er først tilkoplet batteriet som gir en konstant spenning på 12 V. Ved tiden $t = 0$ bytter bryteren posisjon.

(a) Hvor stor ladning har kondensatoren før bryteren bytter posisjon, og hvor mye energi er da lagret i kondensatoren?

SVAR: Kondensatoren har da en spenning mellom platene på $V_C = 12$ V.
Ladningen er da $q = C\, V_C = 6 \cdot 10^{-8}$ C. Lagret energi er $U = CV_C^2/2 = 3.6 \cdot 10^{-7}$ J.

(b) Anta at spolen har null resistans. Hva må induktansen i spolen være for at strømmen skal oscillere med vinkelfrekvens $\omega = 100\,\pi\ \mathrm{s}^{-1}$?
Finn uttrykk for strømmen i kretsen for $t \geq 0$.

SVAR: For $t \geq 0$ gjelder at $0 = V_C + V_L = q(t)/C + L\, I'(t)$, der I er strømmen gjennom spolen og kondensatoren. Deriverer mhp t , og får at strømmen tilfredsstiller, $I(t) = -\,LC\, I''(t)$.
Løsningen av denne likningen er av typen sin ωt og cos ωt , der $\omega^2 = 1/LC$.
Her må $I(t) = \sin \omega t$, da strømmen er null i det bryteren bytter posisjon.
Induktansen må være $L = 1/(\omega^2 C) = 2 \cdot 10^3$ H.

Ta nå hensyn til at spolen er laget av en 10 m lang koppertråd med tverrsnitt 0.5 mm^2. Kopper har resistivitet $\rho = 1.72\ 10^{-8}\ \Omega$m.

(c) Finn spolens resistans.
Sett opp differensial-likningen som nå beskriver strømmen i kretsen for $t \geq 0$.
Lag en skisse av strømmens tidsforløp.

SVAR: Resistansen er gitt ved $R = \rho l/A$, der l = 10 m og A = 0.5 mm^2, som gir R = 0.17 Ω.
For $t \geq 0$ gjelder nå likningen $0 = V_C + V_R + V_L = q(t)/C + RI + L\, I'(t)$
Fra formelark finner man at strømmen nå vil oscillere med frekvensen $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$

Løsningen av likningen gir at oscillasjonen er eksponensielt dempet.
(Forventet svar skal også inkludere en enkel graf av en dempet oscillerende kurve)