UNIVERSITETET I OSLO

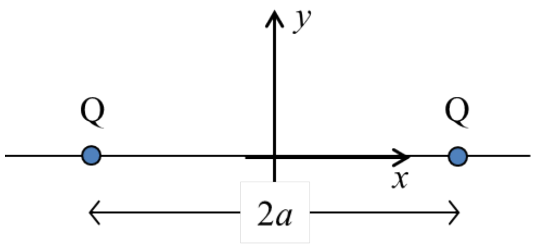
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS1120 og FYS1120L Elektromagnetisme
Eksamensdag: 2. desember 2015.
Tid for eksamen: 14:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 3 sider
Vedlegg: se side 3
Tillatte hjelpemidler: Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter
Rottmann: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

To positive elektriske ladninger, Q, er fast plassert i papirplanet med avstand 2*a*, som vist under.



a) Lag en figur som viser bilde av de elektriske feltlinjene i papirplanet.
Hvor er feltet lik null?

SVAR: se Fig. 28c, side 31 i læreboka. Feltet er null i origo og uendelig langt vekk fra ladningene.

b) Vis at det elektriske feltet langs y-aksen (midt mellom ladningene) er gitt ved

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{y}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \quad .$$

Hva blir $E(y)$ når $y >> a$? Kommenter uttrykket.

SVAR: I et punkt y på y-aksen er avstanden til begge ladninger $r = (y^2+a^2)^{1/2}$, og hver ladning bidrar med et E-felt som i størrelse er $E = (Q/4\pi\varepsilon_0)r^{-2}$. Vektorsummen av feltene vil peke langs y-aksen, og adderer man y-komponentene til felt-bidragene fåes det oppgitte uttrykk for E. Når $y >> a$ blir a^2 neglisjerbar i nevneren, slik at $E = (Q/2\pi\varepsilon_0)y^{-2} = (2Q/4\pi\varepsilon_0)y^{-2}$. Dette be-skriver feltet fra en punktlading 2Q, som er slik ladning-paret må framstå fra lang avstand.

c) Finn et uttrykk for potensialet, V, langs y-aksen når vi setter $V = 0$ i $y = \infty$.

SVAR: Bruker (husker) at potensialet fra en punktladning, Q, i en avstand r, er $V(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r$.
På y-aksen er $r = (y^2+a^2)^{1/2}$ for begge ladningene, og potensialet der blir da

$$V(y) = Q/2\pi\varepsilon_0 \times (y^2+a^2)^{-1/2}.$$

d) En ny punktladning, $q > 0$, beveges nedover y-aksen fra $y = \infty$ til $y = 0$.
Finn arbeidet som utføres.

SVAR: Arbeidet som utføres av kraften som beveger ladningen q mot E-feltet i b) utfører et arbeid som er lik økningen i potensiell energi, $W = qV(0) - qV(\infty) = qV(0) = qQ/2\pi\varepsilon_0 a$.

Oppgave 2

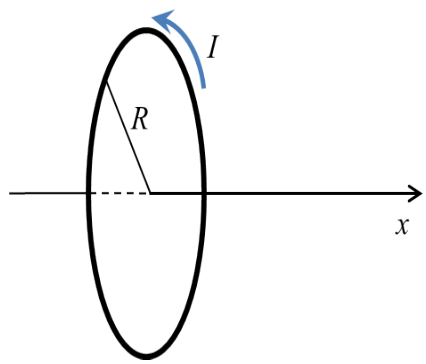
Biot-Savart's lov kan skrives

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,d\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \quad .$$

a) Forklar presist betydningen av alle symbolene som inngår i likningen over.

SVAR: Her er d$\boldsymbol{B}$ bidraget til magnetfeltet i et punkt, P, fra en liten lengde d$\boldsymbol{l}$ av et filament med elektrisk strøm I. Videre er r avstanden mellom punktet P og d$\boldsymbol{l}$, der $\hat{\boldsymbol{r}}$ er enhetsvektoren.

En sirkulær ledning har radius R og fører en strøm I, se figuren der x-aksen står normalt på sirkelplanet og går gjennom sentrum av sirkelen.



b) Hva er retningen til B-feltet på x-aksen?
Finn bidraget til det totale feltet på aksen fra en liten lengde, dl, av ledningen.

SVAR: se læreboka side 279, Fig. 12 og lign. 13.

c) Vis at størrelsen til totalfeltet på x-aksen er gitt ved, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2}\,\dfrac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$.

SVAR: se læreboka side 279, og utledning av lign. 15.

d) Nå plasseres 2 slike strømviklinger på x-aksen med en avstand $2R$ mellom dem.
Finn feltet på x-aksen i punktet midt mellom viklingene når $I = 10$ A og $R = 4$ cm.

SVAR: B-feltet fra 1 slik vikling i en avstand R på x-aksen er lik $B(x=R)$. I midtpunktet mellom de 2 viklingene bidrar de like mye til totalfeltet, slik at feltet der er
$2B(x=R) = \mu_0 I\, R^2/(R^2+R^2)^{3/2} = \mu_0 I\,/(2^{3/2}R) = 4.4\ \mu$T.

Oppgave 3

En metallkule med radius R har netto ladning, Q, der $Q > 0$.

a) Bruk Gauss' lov til å finne et uttrykk for E-feltet utenfor kula.

SVAR: Velger en kuleformet gaussflate med radius $r > R$ rundt metallkula. Med felles kulesenter vil E-feltet stå normalt på gaussflaten og ha verdien $E(r)$. Fluksen gjennom flaten blir $E(r)\ 4\pi r^2$ og fra Gauss' lov er denne fluksen lik Q/ε_0, slik at, $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

Et tynt kuleskall, også laget av metall og med radius $R' > R$, plasseres rundt kula. Begge har felles senter, og i rommet mellom dem er det vakum. Kuleskallet tilføres ladningen $-Q$.

b) Vis at kapasitansen for denne kule-kondensatoren er gitt ved,

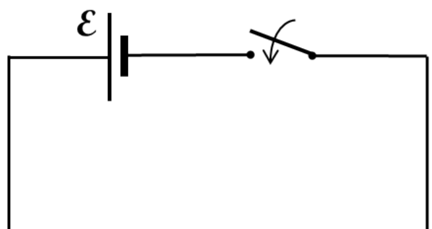
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R\,R'}{R' - R} \quad .$$

SVAR: se læreboka, eksempel 3 på side 124.

c) La nå $R' \to \infty$. Hva blir uttrykket for kapasitansen?
Jorda kan betraktes som en ledende kule, og har radius 6380 km.
Beregn kapasitansen.

SVAR: Nå blir $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, og med $R = 6380$ km blir $C = 0.71$ mF.

Oppgave 4



Figuren viser en krets der bryteren lukkes ved tiden $t = 0$. Her er $R = 2\ \text{k}\Omega$, $L = 5$ mH, mens batteriet har en elektromotorisk spenning på 12 V, og indre resistans 10 Ω.

a) Sett opp en likning som spenningsfallene i kretsen må tilfredsstille.
Hvor stor er strømmen i kretsen rett etter $t = 0$, og etter svært lang tid.

SVAR: $\mathcal{E} = R_i I + RI + LI'(t)$, der I er strømmen og R_i er indre resistans i batteriet.
Rett etter $t = 0$ er $I = 0$ pga tregheten i spolen. Når $t \to \infty$ stabiliseres strømmen og spenningsfallet over induktansen er null. Strømmen blir $I = \mathcal{E}/(R_i + R) = 6.0$ mA.

b) Vis at for $t > 0$ kan strømmen uttrykkes på formen $I(t) = I_0\,[1 - \exp(-\,t/\tau)]$.
Hvor stor er I_0 og tidskonstanten?

SVAR: Setter inn $I(t)$ i likningen spurt etter i a), og ser at likningen er tilfredsstilt dersom
$I_0 = \mathcal{E}/(R_\mathrm{i} + R) = 6.0$ mA, og med tidskonstanten $\tau = L/(R_\mathrm{i} + R) = 2.5\ \mu\mathrm{s}$.

VEDLEGG:

$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m

$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}$ H/m