UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	FYS1120 — Elektromagnetisme
Eksamensdag:	5. oktober 2015
Tid for eksamen:	10.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter Rottman: Matematisk formelsamling Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Gauss' lov kan skrives $\mathbf{\Phi}_E = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

(a)

Beskriv presist alle symbolene som inngår i uttrykket over.

Løsning:

$\mathbf{\Phi}_E$	–	Elektrisk fluks gjennom en lukket flate.
$\oint$	–	Integral over en lukket flate
$\mathbf{E}$	–	Elektrisk felt
$\mathrm{d}\mathbf{A}$	–	Infinitesimalt arealelement
Q	–	Ladning innesluttet av Gaussflaten
ϵ_0	–	Elektrisk vakuumpermittivitet

Betrakt en metallkule med radius R, og som nå har fått tilført et overskudd av elektroner som utgjør en total ladning q. Ladningsfordelinen er nå i likevekt.

(b)

Hvor befinner ladningene seg? Forklar hvorfor E-feltet inne i kula er null?

(Fortsettes på side 2.)

Løsning:
Ladningene befinner seg på overflaten av kulen, siden det er her de ender opp nå alle frastøter hverandre. Ladningsfordelingen vi da sitter igjen med er et uniformt ladet kuleskall. Ved å se for oss en sfærisk Gaussflate med sentrum i sentrum av kulen, og radius $r < R$, ser vi hvorfor feltet på innsiden er null: Et eventuelt felt må stå normalt på denne Gaussflaten, og ha samme skalarverdi overalt på et gitt kuleskall (av symmetrigrunner). Gauss lov forteller oss at nettobidraget fra feltet må være null, siden det ikke er noen innesluttet ladning. Dermed må feltet være null inni kulen.

(c)

Finn et uttrykk for E-feltet i rommet utenfor kula. Angi feltretningen.

Løsning:
Bruker Gauss' lov med en sfærisk flate utenfor metallkula.

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Feltet står radielt inn mot sentrum av kula.

(d)

Finn potensialet, V, i en generell avstand, r, fra kulas sentrum. Skisser $V(r)$.

Løsning:
Setter nullpunktet for potensialet i det uendelig fjerne, og begynner med den delen av potensialet som ligger utenfor kula.

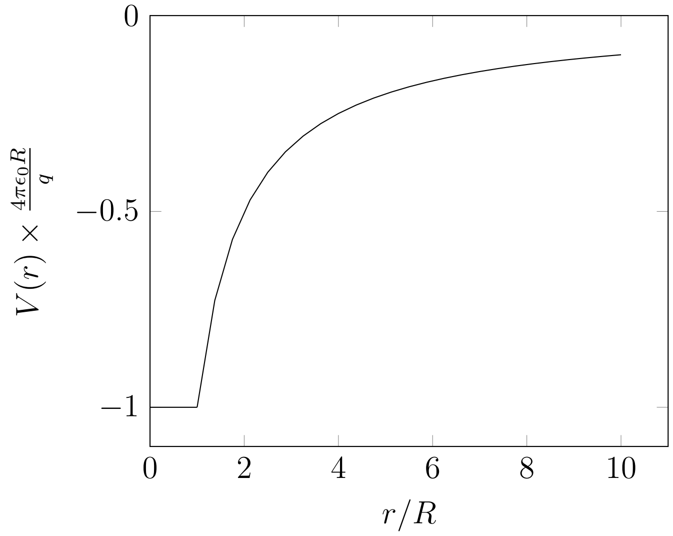
$$V = -\int_{\infty}^{r>R} \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2}$$

Inni kula er feltet null, altså endrer ikke potensialet seg der. Dermed blir det endelige potensialet:

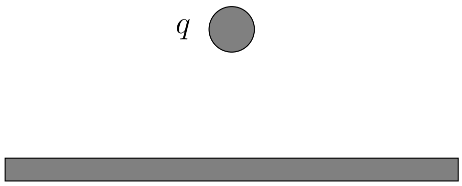
$$V(r) = \begin{cases} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{if } r \leq R \\ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{if } r > R \end{cases} \tag{3}$$

Skisse:

(Fortsettes på side 3.)



Den ladde kula bringes i nærheten av en uladet metallplate.



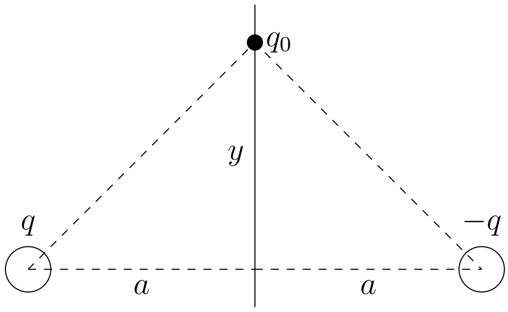
(e)

Lag figur der det framgår hvordan (i) ladningene, (ii) E-felt og (iii) ekvipotensialflatene nå er fordelt, og begrunn hovedtrekkene i figuren.

Løsning:
Se University Physics kapittel 23.4 (Equipotential Surfaces).

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 2

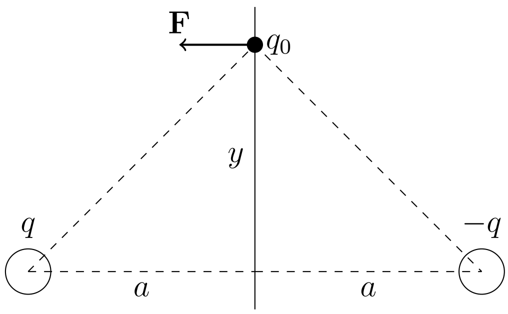


Tre punktformede ladninger er plassert som vist på figuren over.

(a)

Vis med en figur retningen på kraften dersom $q > 0$ og $q_0 < 0$.
Finn uttrykk for kraften på ladningen q_0 fra dipolen $-q$ og q.

Løsning:



Kraften på partikkelen q_0 er summen av kreftene fra de to ladningene i dipolen. Vi ser at kreftene i y-retning vil kansellere, så vi trenger bare å se på bidragene i x-retning.

$$F_x = 2\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0(a^2+y^2)}\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{q_0 q}{2\pi\epsilon_0}\frac{a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

(b)

Hva blir uttrykket for kraften når $y >> a$?
Skriv resultatet uttrykt ved dipolmomentet.

(Fortsettes på side 5.)

Løsning:
Når $y >> a$ vil uttrykket $\frac{a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ gå mot $\frac{a}{y^3}$, slik at kraften blir

$$F_x \approx \frac{aq_0 q}{2\pi\epsilon_0 y^3} = \frac{pq_0}{4\pi\epsilon_0 y^3} \tag{5}$$

Oppgave 3

Du har 3 like resistanser, R, som skal sammenkobles mellom polene (terminalene) til et batteri på ulike måter uten at noen av resistansene blir strømløse.

(a)

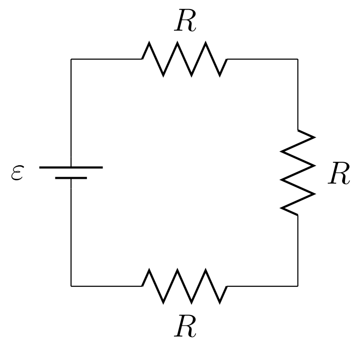
Lag figurer som viser alle de 4 måtene resistansene kan sammenkobles på, og finn uttrykk for resultant-resistansen i hvert tilfelle.

Løsning:
Løsningen for denne deloppgaven er slått sammen med løsningen for neste deloppgave.

(b)

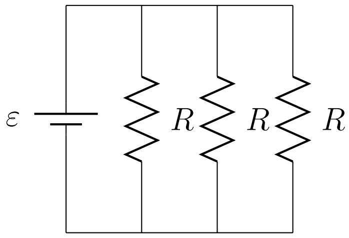
Batteriet har en elektromotorisk spenning på 9 V, og indre resistans, $R_i = \frac{R}{10}$. La $R = 100\,\Omega$, og beregn strømmen, I, som batteriet leverer i de ulike tilfellene. Beregn total effekt levert av batteriet i hvert tilfelle.

Løsning:



Krets 1
$R_1 = 3R$
$I_1 = \frac{V}{R_{tot}} = \frac{9\,\mathrm{V}}{310\,\Omega} = 0.029\,\mathrm{A}$
$P_1 = VI = 9\,\mathrm{V} \cdot 0.029\,\mathrm{A} = 0.26\,\mathrm{W}$

(Fortsettes på side 6.)

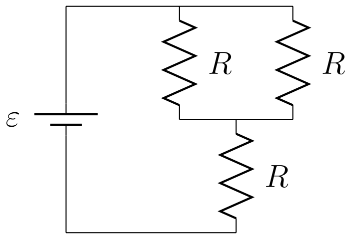


Krets 2

$R_2 = \frac{R}{3}$

$I_2 = \frac{V}{R_{tot}} = \frac{9\,\mathrm{V}}{43.3\,\Omega} = 0.21\,\mathrm{A}$

$P_2 = VI = 9\,\mathrm{V} \cdot 0.21\,\mathrm{A} = 1.9\,\mathrm{W}$

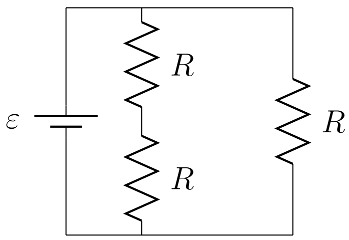


Krets 3

$R_3 = \frac{3R}{2}$

$I_3 = \frac{V}{R_{tot}} = \frac{9\,\mathrm{V}}{160\,\Omega} = 0.056\,\mathrm{A}$

$P_3 = VI = 9\,\mathrm{V} \cdot 0.056\,\mathrm{A} = 0.50\,\mathrm{W}$



Krets 4

$R_4 = \frac{2R}{3}$

$I_4 = \frac{V}{R_{tot}} = \frac{9\,\mathrm{V}}{76.7\,\Omega} = 0.12\,\mathrm{A}$

$P_4 = VI = 9\,\mathrm{V} \cdot 0.12\,\mathrm{A} = 1.1\,\mathrm{W}$

Oppgave 4

Kapasitansen til en kondensator er definert som $C = \frac{Q}{V}$.

(a)

Gi en presis definisjon av symbolene Q og V. Hva er uttrykket for kapasitansen til en parallellplatekondensator? Definer symbolene i uttrykket.

Løsning:

Q – Ladning på hver av kondensatorplatene.

V – Spenning over kondensatoren / Potensialforskjell mellom kondensatorplatene.

Uttrykket for kapasitansen i en parallellplatekondensator er $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$. C er kapasitansen, A er arealet til hver av kondensatorplatene og d er avstanden mellom kondensatorplatene.

Betrakt nå en lang koaksialsylinderkondensator med indre og ytre radius r_a og r_b. Ladning per lengde på den indre og ytre sylinderflaten er henholdsvis $+\lambda$ og $-\lambda$.

(Fortsettes på side 7.)

(b)

Vis at feltet mellom sylinderflatene kan skrives, $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$.

Løsning:
Bruker Gauss' lov med en sylinder som inneslutter den indre sylinderflaten på kondensatoren, og ser at

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \tag{6}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{7}$$

(c)

Utled et uttrykk for kapasitans per lengde for kondensatoren.

Løsning:
Kapasitans per lengde er (ut ifra definisjonen av kapasitans)

$$\frac{C}{l} = \frac{Q}{lV} = \frac{\lambda}{V} \tag{8}$$

Vi kan finne potensialet V ved å integrere det elektriske feltet

$$V = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a} \tag{9}$$

Dermed blir kapasitansen per lengde

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_b}{r_a}} \tag{10}$$

(d)

Hva er et dielektrikum? Forklar kvalitativt hvorfor dielektrika benyttes i kondensatorer.

Løsning:
Et dielektrikum er en isolator som lar seg polarisere om det blir plassert i

(Fortsettes på side 8.)

et elektrisk felt. Denne polariseringen fører til at det elektriske feltet inne i dielektrikumet blir mindre enn det påtrykte elektriske feltet. Dielektrika benyttes i kondensatorer fordi det øker kapasitansen. Det skyldes at når det elektriske feltet reduseres, reduseres også potensialforskjellen mellom kondensatorplatene, slik at kondensatoren kan holde en større ladning enn tidligere om potensialforskjellen holdes konstant.